

Mai 1995

PROF.DR.- ING. H. SPÄTH
UNIVERSITÄT KARLSRUHE

UNTERLAGEN ZUR VORLESUNG

ASYNCHRONMASCHINE, SYNCHRONMASCHINE
(SYSTEMANALYSE UND BETRIEBSVERHALTEN)

Inhalt

	Seite
1. Berechnung von Luftspaltfeldinduktivitäten	1
2. Systemgleichungen der Drehstromasynchronmaschine mit Schleifringläufer	12
3. Speisung der Drehstromasynchronmaschine mit nicht-sinnsförmigem Spannungs- oder Stromsystem	25
4. Dynamische Struktur der Drehstromasynchronmaschine	40
5. Stationärer Betrieb der Asynchronmaschine am unsymmetrischen Netz	52
6. Käfigläufermaschine	63
7. Stromverdrängung beim Käfigläufer	64
8. Systemgleichungen der Drehstromsynchronmaschine	79
9. Permanentmagneterregte Synchronmaschine ohne Dämpferwicklung	97
10. Dreipoliger Stoßkurzschluß der Drehstromsynchronmaschine	100

1. Berechnung von Luftspaltfeldinduktivitäten:

Voraussetzungen: magnetische Spannung im Eisen vernachlässigbar, glatte Mantelflächen von Stator und Rotor, Durchflutungen in Nut-schlitzmitte konzentriert angenommen, Endeffekte unberücksichtigt.

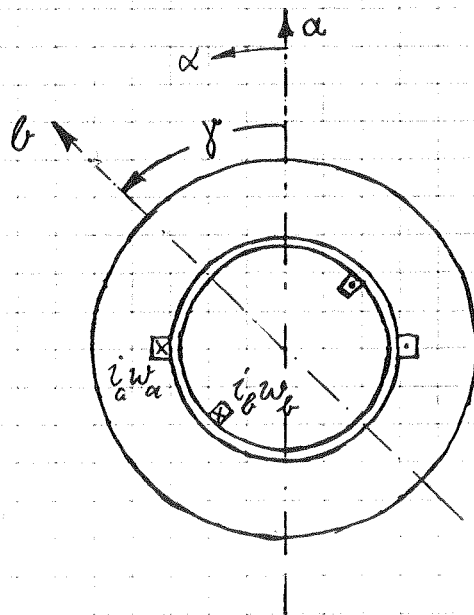
Die im Luftspalt der Maschine gespeicherte magnetische Energie wird aus dem Volumenintegral der Energiedichte

$$W_m = \frac{1}{2} \int B H dV = \frac{1}{2} \mu_0 \int H^2 dV$$

berechnet und mit dem Ausdruck

$$W_m = \frac{1}{2} (i)^T (L) (i)$$

verglichen. Der Koeffizientenvergleich liefert die Luftspaltfeld-induktivitäten als Elemente der Matrix (L). Zur Veranschaulichung wird als Beispiel ein Zweispulenmodell herangezogen.



Luftspaltvolumenelement:

$$dV = \frac{1}{2} D \cdot \frac{1}{p} d\alpha \cdot l \cdot d'(\alpha, t)$$

D, Bohrungsdurchmesser

p, Polpaarzahl (hier p=1)

α, elektrischer Umfangswinkel (Umfang $\hat{=}$ p · 2π)

l , aktive Maschinenzlänge

$d^*(\alpha, t)$, Luftspaltbreite (im allgemeinen Fall von α und t abhängig) randschal vergrößert gegenüber dem geometrischen Luftspalt zur Berücksichtigung des Wertung und der magnet. Spannung im Eisen

Der Bohrungsdurchmesser wird mit der Polteilung τ_p ausgedrückt:

$$\pi \cdot D = 2p \tau_p$$

$$D = \frac{2p \tau_p}{\pi}$$

Damit wird

$$W_m = \frac{1}{2\pi} \mu_0 l \tau_p \int_{\alpha=0}^{2p\pi} H^2(\alpha) d^*(\alpha, t) d\alpha$$

Bei Polpaarsymmetrie ist $H(\alpha)$ 2π -periodisch und $d^*(\alpha)$ π -periodisch, sodaß man schreiben kann:

$$W_m = \frac{1}{2\pi} \mu_0 p l \tau_p \int_{\alpha=0}^{2\pi} H^2(\alpha) d^*(\alpha, t) d\alpha$$

Unter $H(\alpha)$ wird die mittlere Radialkomponente der Feldstärke im Luftspalt verstanden. Die magnetische Spannung zwischen zwei auf dem gleichen Radius liegenden Punkten von Stator und Rotor ist dann

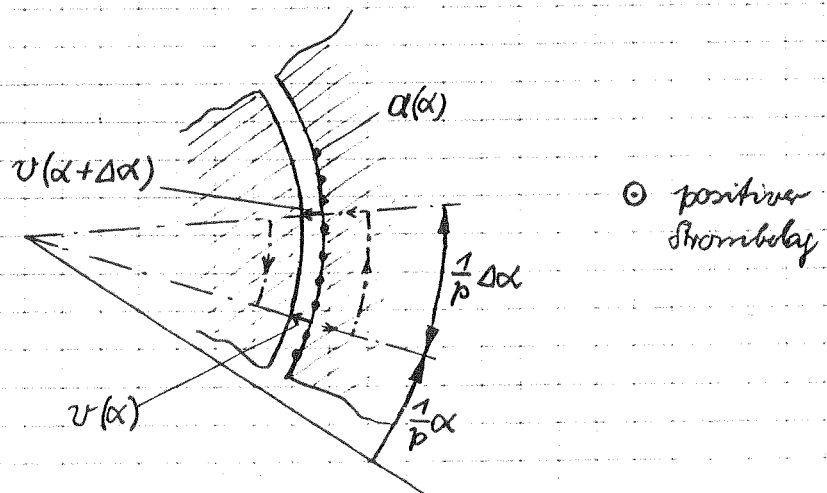
$$v(\alpha) = \int_{r_1(\alpha)}^{r_2 + d^*(\alpha)} \vec{H}(\vec{r}) d\vec{r} = H(\alpha) \cdot d^*(\alpha)$$

r_1 ist der zum Winkel α gehörende Rotorradius (bei zylindrischem Rotor ist r_1 unabhängig von α). In W_m wird die Feldstärke durch die magnetische Spannung ersetzt:

$$H(\alpha) = \frac{1}{d^*(\alpha)} v(\alpha)$$

$$W_m = \frac{1}{2\pi} \mu_0 p l \tilde{z}_p \int_{\alpha=0}^{2\pi} \frac{1}{f^{1/2}(\alpha)} v^2(\alpha) d\alpha$$

Die magnetische Spannung $v(\alpha)$ muß aus den Durchflutungen bzw. dem Strombelag $a(\alpha)$ bestimmt werden.



Die Anwendung des Durchflutungsgesetzes liefert:

$$v(\alpha + \Delta\alpha) - v(\alpha) = a(\alpha) \cdot \Delta x$$

Δx ist das dem räumlichen Winkel $\frac{1}{p} \Delta\alpha$ entsprechende

Wegelement:

$$\frac{\Delta x}{\frac{1}{p} \Delta\alpha} = \frac{2p \tilde{z}_p}{2\pi}$$

$$\Delta x = \frac{\tilde{z}_p}{\pi} \Delta\alpha$$

$$\frac{v(\alpha + \Delta\alpha) - v(\alpha)}{\Delta\alpha} = \frac{\tilde{z}_p}{\pi} a(\alpha)$$

Grenzübergang ergibt:

$$\frac{dv(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\tilde{z}_p}{\pi} a(\alpha)$$

Berechnung der magnetischen Spannung (Felderregerkurve) aus dem

Strombelag:

$$v(\alpha) = \frac{\tilde{z}_p}{\pi} \int a(\alpha) d\alpha + C$$

Die Integrationskonstante C folgt aus der Bedingung, daß der Hüllstromfluß verschwinden muß. Für die polpaarsymmetrische Anordnung bedeutet dies:

$$\int_{\alpha=0}^{2\pi} v(\alpha) d\alpha = 0$$

Bei einem beliebigen Zweispulenmodell, für das die eingangsgemachten Voraussetzungen gelten, überlagern sich die Felderzeugerkurven der beiden Spulen a und b zur resultierenden Felderzeugerkurve:

$$v(\alpha) = v_a(\alpha) + v_b(\alpha)$$

Die Felderzeugerkurven der Spulen werden als Produkte aus einer Geometriefunktion und dem Strom dargestellt:

$$v_a(\alpha) = g_a(\alpha, t) \cdot i_a(t)$$

$$v_b(\alpha) = g_b(\alpha, t) \cdot i_b(t)$$

Damit erhält man

$$W_m = \frac{1}{2\pi} \mu_0 p l r_p \int_{\alpha=0}^{2\pi} \frac{1}{d(\alpha)} (g_a^2 i_a^2 + 2 g_a g_b i_a i_b + g_b^2 i_b^2) d\alpha$$

Koeffizientenvergleich mit

$$W_m = \frac{1}{2} L_{aa} i_a^2 + L_{ab} i_a i_b + \frac{1}{2} L_{bb} i_b^2$$

ergibt:

$$L_{ab} = \frac{1}{\pi} \mu_0 p l r_p \int_{\alpha=0}^{2\pi} \frac{1}{d(\alpha)} g_a(\alpha, t) g_b(\alpha, t) d\alpha$$

Die Eigeninduktivitäten erhält man, indem man b durch a oder umgekehrt ersetzt.

Unter der Annahme konstanten Luftspalts folgt:

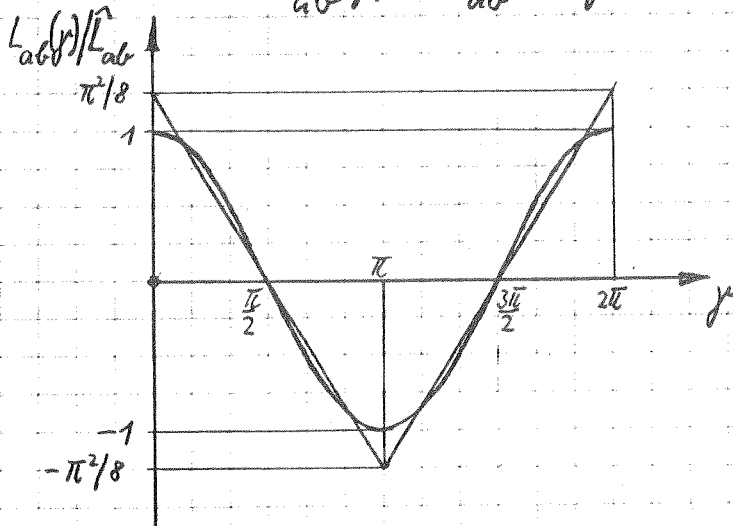
$$L_{ab}(y) = \hat{L}_{ab} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^2} \sin^2 v \frac{\pi}{2} \cos v y$$

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^2} \sin^2 v \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{8}$$

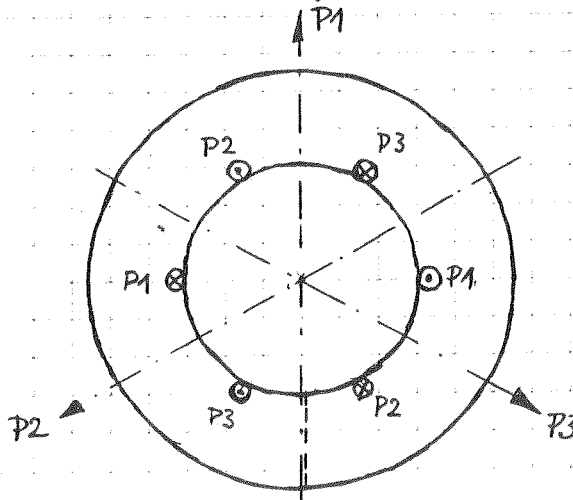
$$\hat{L}_{ab} = \frac{4}{\pi^2} \mu_0 w_a w_b \frac{l r_p}{p \delta^2}$$

Beschränkung auf 1. Harmonische ($v=1$):

$$L_{ab}(y) = \hat{L}_{ab} \cos y$$



Beispiel Drehstromwicklung:



Polpaarzahl $p=1$

Stromzahl pro Pol und Strang

$$q = \frac{N}{2p \cdot 3} = \frac{6}{2 \cdot 3} = 1$$

Angeführt werden Drehstromwicklungen mit $q > 1$ entweder als Einschichtwicklungen oder, als geschnekte Zweischichtwicklungen, die aus Spulen gleicher Weite $\tau < \tau_p$ aufgebaut sind. Oberschicht und Unterschicht sind um den el. Winkel $(1 - \tau/\tau_p)\pi$ gegeneinander verschoben. Die Spulenweite τ muß ein ganzzahliges Vielfaches der Nutteilung

$$\tau_n = \frac{2p\tau_p}{N} = \frac{\tau_p}{3q}$$

sein. Der Nutteilung entspricht der el. Nuttenwinkel

$$\alpha_n = \frac{2p\pi}{N} = \frac{\pi}{3q}$$

Im Beispiel der geschnekten Zweischichtwicklung ist:

$$N=18, p=1, q=3, \tau_n = \tau_p/9, \alpha_n = 20^\circ, \tau/\tau_p = 8/9, \tau = 8\tau_n, (1 - \tau/\tau_p)\pi \hat{=} 20^\circ.$$

Nuttdurchflutung einer Schicht:

$$Q_{p10} = Q_{p1n} = \frac{w \cdot 3 \cdot 2}{N \cdot 2} i_{p1} = \frac{w}{N/3} i_{p1} = \frac{w}{2pq} i_{p1}$$

Integration eines Strombelassungspulses an der Stelle α_0 :

$$\frac{\tau_p}{\pi} \int \frac{w}{2pq} i_{p1} \frac{\pi}{\tau_p} f(\alpha - \alpha_0) d\alpha = \frac{w}{2pq} i_{p1} G(\alpha - \alpha_0) + C$$

Fourieranalyse der Felderregenkurve eines Strangs:

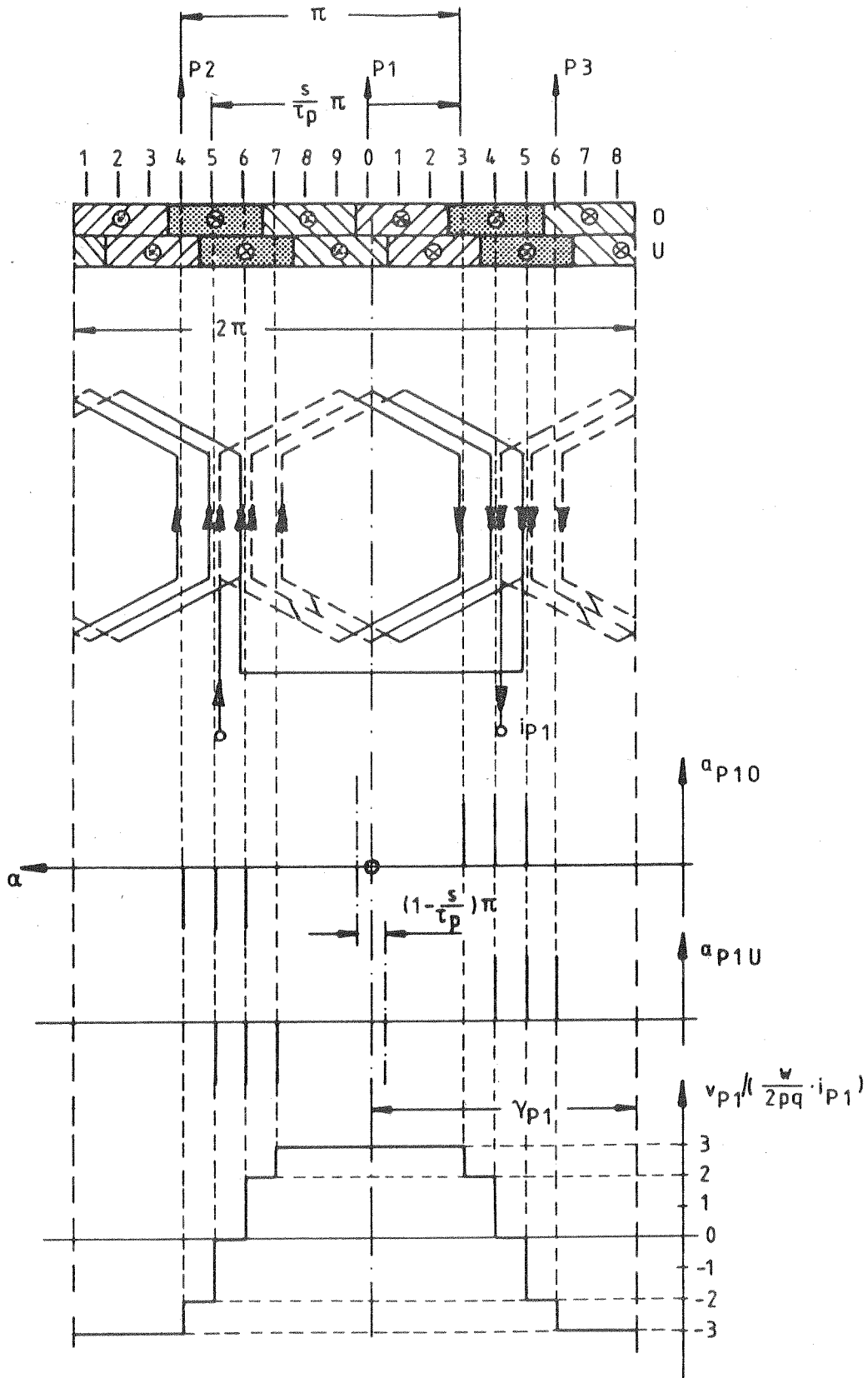
$$v_{p1}(\alpha, t) = i_{p1}(t) \cdot \frac{2w}{p\pi} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \sum_{\lambda} \cos \lambda \alpha$$

Wicklungsfaktor

$$\sum_{\lambda} = \frac{\sin(\lambda q \alpha_n/2)}{q \sin(\lambda \alpha_n/2)} \sin \lambda \frac{\pi}{2} \frac{\tau}{\tau_p} \sin^2 \lambda \frac{\pi}{2}$$

$$1. \text{ Harmonische } (\lambda=1): v_{p1} = i_{p1} \cdot \frac{2w \sum_{\lambda}^{\infty}}{p\pi} \cos \alpha$$

$$q=1, \frac{\tau}{\tau_p}=1: \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|} \lambda & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline \sum_{\lambda} & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}$$



Dreisträngige gesehte Zweischichtwicklung:

18 Nuten pro Polpaar, $q = 3$

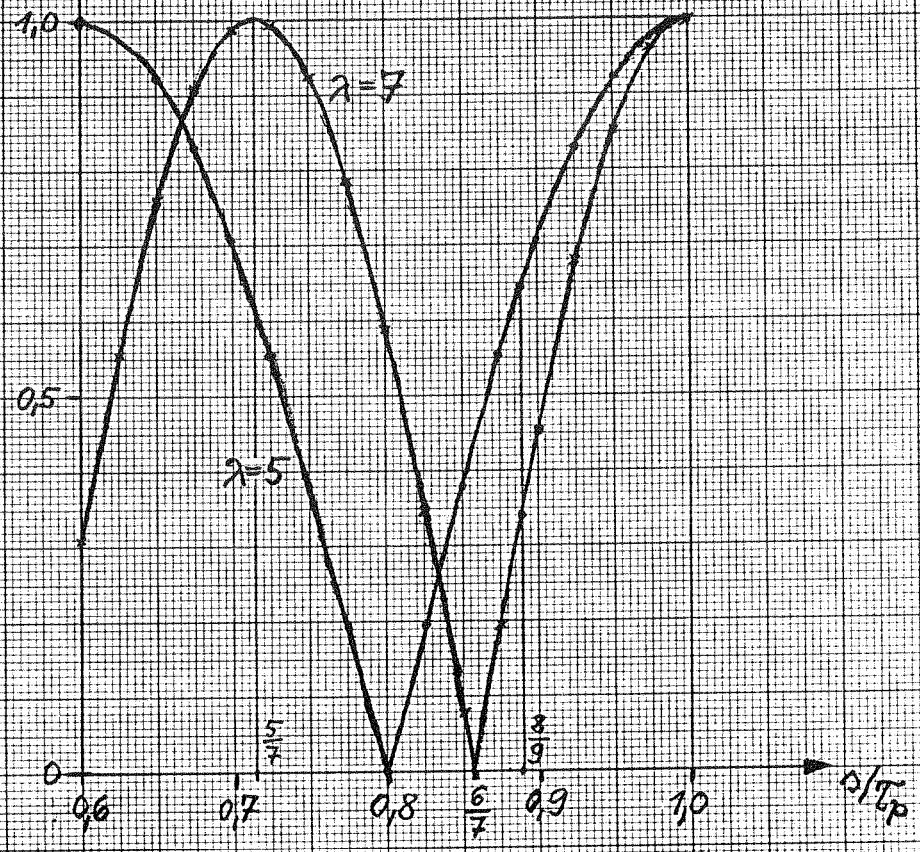
Strombeläge des Stranges P 1

(a_{P10} Oberschicht, a_{P1U} Unterschicht)

Felderregerkurve des Stranges P 1 (v_{P1})

P 1
 P 2
 P 3

$\dots \left| \sin \lambda \frac{\pi}{2} \frac{\sigma}{T_p} \right|$



Betrag des Sehnungsfaktors für $\lambda=5$ und $\lambda=7$

Definition der wirksamen Windungszahl w_g^E :

die Windungszahl einer Vergleichs-Durchmesserwindung, die bei gleichem Strom die gleiche 1. Harmonische der Felderzeugerkurve liefert.

Schnurung ermöglicht die Reduktion bzw. Unterdrückung von Harmonischen:

$$\sin \lambda \frac{\pi}{2} \frac{s}{\tau_p} \stackrel{!}{=} 0 \quad \wedge \quad \frac{s}{\tau_p} = \frac{2g}{\lambda} < 1, \quad g = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{z.B.} \quad \lambda = 5 \quad s/\tau_p = 4/5 \quad (g=2)$$

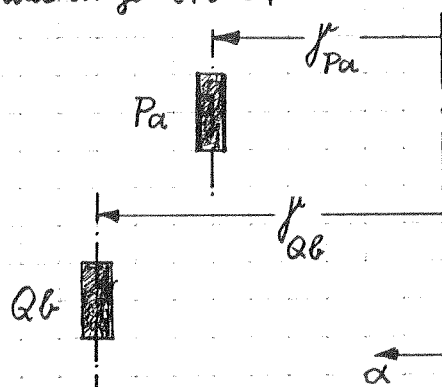
$$\lambda = 7 \quad s/\tau_p = 6/7 \quad (g=3)$$

Zum Wicklungsbeispiel:

λ	1	3	5	7	9	11	13
$\sin \lambda \frac{\pi}{2} \frac{8}{9}$	0,9848	-0,8660	0,6428	-0,3420	0	0,3420	-0,6428
$\frac{\sin \lambda \pi / 6}{3 \sin \lambda \pi / 18}$	0,9598	0,6667	0,2176	-0,1774	-0,3333	-0,1774	0,2176
f_λ	0,9452	-0,5774	0,1399	0,0607	0	-0,0607	-0,1398

Für $\lambda = \text{gerade}$ ist $f_\lambda = 0$. Die Harmonischen mit durch 3 teilbarer Ordnung λ bilden bei einer Dreiströmmwicklung kein resultierendes Feld, wenn die Nullkomponente der Ströme verschwindet ($i_{P1} + i_{P2} + i_{P3} = 0$).

Berechnung der Wechselinduktivität zwischen zwei Strängen, die zwei verschiedenen dreisträngigen Wicklungssystemen P und Q gleicher Polpaarzahl angehören ($d'' = \text{const.}$):



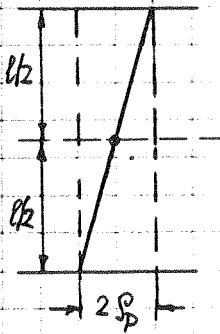
$$g_{Pa}(\alpha, t) = \frac{2w_p}{p\pi} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \{P_{\lambda}\} \cos \lambda(\alpha - \gamma_{Pa})$$

$$g_{Qb}(\alpha, t) = \frac{2w_Q}{p\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu} \{Q_{\mu}\} \cos \mu(\alpha - \gamma_{Qb})$$

$$L_{Pa, Qb} = \frac{4\mu_0 l \tau_p w_p w_Q}{\pi^2 p d''} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^2} \{P_v\} \{Q_v\} \cos v(\gamma_{Pa} - \gamma_{Qb})$$

Liegt Nutzschrägung eines Maschinenbaus vor, dann tritt in den Wicklungsfaktoren noch der Schrägungsfaktor hinzu

$$X_v = \frac{\sin v(\beta_p - \beta_Q)}{v(\beta_p - \beta_Q)} ;$$



$2\beta_p$ und $2\beta_Q$ sind die el. Schrägungswinkel (Abstand zwischen den gegenüberliegenden Stirnpunkten der Schlitzmitten einer Nut). Schrägung dient der weiteren Reduktion des Einflusses bestimmter Harmonischer. Normalerweise wird der Rotor um etwa eine Statornteilung geschrägt.

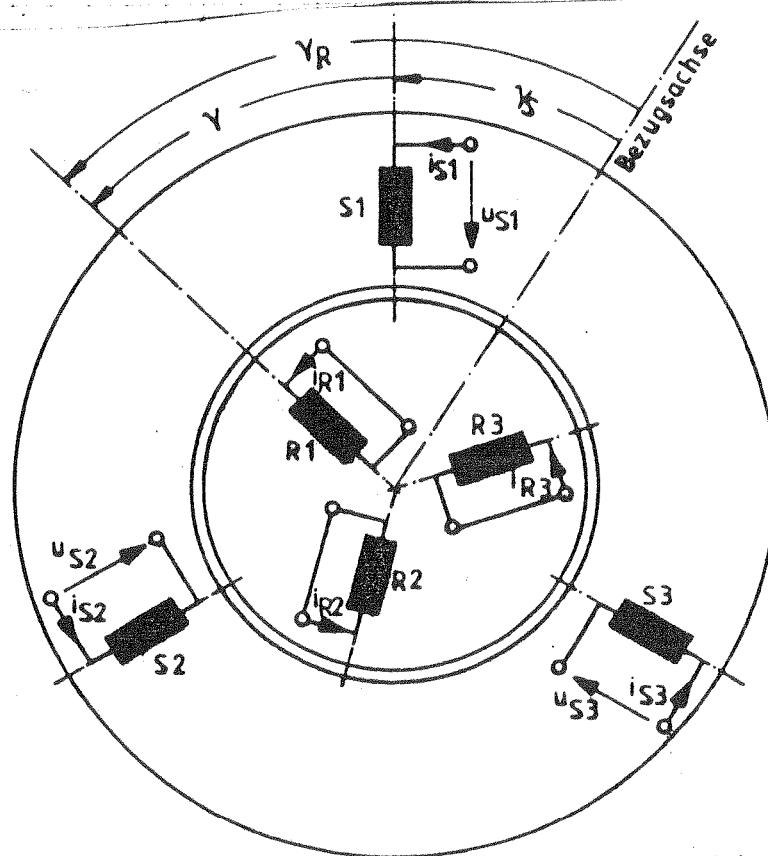
$(\gamma_{Pa} - \gamma_{Qb})$ ist die el. Winkeldifferenz zwischen den Achsen der beiden Stränge Pa und Qb. Sie ist dann zeitlich veränderlich, wenn einer der beiden Stränge dem Stator und einer dem Rotor angehört und der Rotor sich dreht.

Für $(\gamma_{Pa} - \gamma_{Qb}) = (2g-1)\pi/2$ ist $L_{Pa, Qb} = 0$, d.h. bei orthogonaler Stellung der Stränge zueinander liegt vollständige Entkopplung vor. Extreme Kopplung herrscht bei $(\gamma_{Pa} - \gamma_{Qb}) = g\pi$ (Vorzeichenwechsel).

Beschränkung auf die 1. Harmonische ($v=1$):

$$L_{Pa, Qb} = \frac{4\mu_0 l \tau_p}{\pi^2 p d''} w_p \{P_1\} w_Q \{Q_1\} \cos(\gamma_{Pa} - \gamma_{Qb})$$

2. Systemgleichungen der Drehstromasynchronmaschine mit Schleifringläufen:



$$\begin{bmatrix} u_S \\ u_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S & \\ & R_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_S \\ i_R \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \left\{ \begin{bmatrix} (L_{SS}) + (S_S) & (L_{SR}) \\ (L_{SR})^T & (L_{RR}) + (S_R) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_S' \\ i_R' \end{bmatrix} \right\}$$

L sind Luftspaltfeldinduktivitäten und S Stator- und Nutfeldinduktivitäten. Nur die Elemente von (L_{SR}) sind vom Rotorpositionswinkel γ abhängig, da es sich um die Wechselinduktivitäten zwischen den Stator- und den Rotorsträngen handelt.

Sämtliche L lassen sich mit der für $L_{p,q}$ hergeleiteten Formel berechnen. Für die von γ abhängigen Induktivitäten wird zur Vereinfachung nur die 1. Harmonische ($v=1$) berücksichtigt.

$$(L_{SS}) = L_S \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2} G_{Sii} & -\frac{1}{2} + G_{Sik} & -\frac{1}{2} + G_{Sjk} \\ -\frac{1}{2} + G_{Sik} & 1 + \frac{1}{2} G_{Sii} & -\frac{1}{2} + G_{Sjk} \\ -\frac{1}{2} + G_{Sjk} & -\frac{1}{2} + G_{Sik} & 1 + \frac{1}{2} G_{Sii} \end{bmatrix}$$

$$L_S = \frac{4\mu_0 l r_p}{\pi^2 p} \sum_{j=1}^{\infty} (w_S \varphi_{Sj})^2$$

$$\sigma_{Sii} = \sum_{v=2}^{\infty} \left(\frac{\varphi_{Sv}}{r \varphi_{S1}} \right)^2 \ll 1$$

$$\sigma_{Sik} = \sum_{v=2}^{\infty} \left(\frac{\varphi_{Sv}}{r \varphi_{S1}} \right)^2 \cos v \frac{2\pi}{3} \ll \sigma_{Sii}$$

(L_{RR}) ist analog zu (L_{SS}) aufzubauen.

$$(L_{SR}) = L_{SR} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cos \gamma & \cos(\gamma + 2\pi/3) & \cos(\gamma + 4\pi/3) \\ \hline \cos(\gamma + 4\pi/3) & \cos \gamma & \cos(\gamma + 2\pi/3) \\ \hline \cos(\gamma + 2\pi/3) & \cos(\gamma + 4\pi/3) & \cos \gamma \\ \hline \end{array}$$

$$L_{SR} = \frac{4\mu_0 l r_p}{\pi^2 p} \sum_{j=1}^{\infty} w_S \varphi_{Sj} w_R \varphi_{Rj} \chi_j \quad \text{ohne Schrägung: } \chi_j = 0$$

Die Stern- und Nullfeldinduktivitäten werden wie (L_{SS}) und (L_{RR}) als zyklische und symmetrische Matrizen angesetzt:

$$(S_S) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline S_{ii} & S_{ik} & S_{ik} \\ \hline S_{ik} & S_{ii} & S_{ik} \\ \hline S_{ik} & S_{ik} & S_{ii} \\ \hline \end{array}$$

(S_R) ist analog aufzubauen.

Die Widerstandsmatrizen haben wegen der galvanischen Trennung der Stränge Diagonalform:

$$(R_S) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline R_S & & \\ \hline & R_S & \\ \hline & & R_S \\ \hline \end{array}$$

(R_R) ist analog aufzubauen.

Das innere Drehmoment ist bestimmt durch

$$M_{i1} = \frac{1}{2} p (i)^T \frac{d(L)}{d\gamma} (i) = p (i_S)^T \frac{d(L_{SR})}{d\gamma} (i_R)$$

Mit dem Spannungsgleichungssystem und der für einen starren mechanischen Verband geltenden mechanischen Gleichung

$$M_{ij} = J \frac{1}{p} \ddot{y} + M_L$$

ist das Maschinenmodell vollständig mathematisch beschrieben.

Da die System-Untermatrizen alle zyklisch und zum Teil zusätzlich noch symmetrisch sind, kann man die Systemgleichungen mittels einer Variablen-Transformation vereinfachen. Zunächst wird der Formalismus einer leistungsinvarianten Transformation allgemein demonstriert:

$$(u) = (R)(i) + \frac{d}{dt} \{ (L)(i) \}$$

$$(u) = (C_u)(\underline{u})$$

$$(i) = (C_i)(\underline{i})$$

$(C_u), (C_i)$ regulär (nichtsingulär)

Leistungsinvarianz: $(i)^T (u) = (\underline{i})^{*T} (\underline{u})$

daraus folgt die Bedingung $(C_i)^{-1} = (C_u)^{*T}$

a) Ist außerdem (C_i) hermitesch, $(C_i) = (C_i)^{*T}$, dann gilt $(C_i) = (C_u)^{-1}$.

b) Ist außerdem (C_i) unitär, $(C_i)^{-1} = (C_i)^{*T}$, dann gilt $(C_i) = (C_u)$.

Transformiertes Spannungsgleichungssystem:

$$(\underline{u}) = (\underline{R})(\underline{i}) + (\underline{F})(\underline{\psi}) + \frac{d}{dt} (\underline{\psi})$$

$$(\underline{\psi}) = (\underline{L})(\underline{i})$$

$$(\underline{R}) = (C_u)^{-1} (R) (C_i)$$

$$(\underline{L}) = (C_u)^{-1} (L) (C_i)$$

$$(\underline{F}) = (C_u)^{-1} \frac{d}{dt} (C_u)$$

Leistungsgleichung:

$$P_{el} = (\underline{i})^{*T}(\underline{u}) = (\underline{i})^{*T}(\underline{R})(\underline{i}) + (\underline{i})^{*T}(\underline{E})(\underline{\psi}) + (\underline{i})^{*T} \frac{d}{dt}(\underline{\psi})$$

$$(\underline{i})^{*T}(\underline{R})(\underline{i}) = (\underline{i})^T(\underline{R})(\underline{i}) = P_{vel} \quad \text{Stromwärmeverluste}$$

$$(\underline{i})^{*T}(\underline{E})(\underline{\psi}) + (\underline{i})^{*T} \frac{d}{dt}(\underline{\psi}) = \dot{W}_m + P_{mech1}$$

$$W_m = \frac{1}{2}(\underline{i})^{*T}(\underline{\psi}) = \frac{1}{2}(\underline{i})^T(\underline{\psi})$$

$$\dot{W}_m = \frac{1}{2}(\underline{i})^{*T} \frac{d}{dt}(\underline{\psi}) + \frac{1}{2} \frac{d(\underline{i})^{*T}}{dt}(\underline{\psi})$$

$$P_{mech1} = (\underline{i})^{*T}(\underline{E})(\underline{\psi}) + \frac{1}{2}(\underline{i})^{*T} \frac{d}{dt}(\underline{\psi}) - \frac{1}{2} \frac{d(\underline{i})^{*T}}{dt}(\underline{\psi})$$

$$P_{mech1} = (\underline{i})^{*T}(\underline{E})(\underline{\psi}) + \frac{1}{2}(\underline{i})^{*T} \frac{d(\underline{L})}{dt}(\underline{i}) + \frac{1}{2}(\underline{i})^{*T}(\underline{L}) \frac{d(\underline{i})}{dt} - \frac{1}{2} \frac{d(\underline{i})^{*T}}{dt}(\underline{\psi})$$

$$P_{mech1}^{*T} = [(\underline{i})^{*T}(\underline{E})(\underline{\psi})]^{*T} + \frac{1}{2}(\underline{i})^{*T} \frac{d(\underline{L})^{*T}}{dt}(\underline{i}) + \frac{1}{2} \frac{d(\underline{i})^{*T}}{dt}(\underline{L})^{*T}(\underline{i}) - \frac{1}{2}(\underline{\psi})^{*T} \frac{d(\underline{i})}{dt}$$

Da aus der Symmetriebedingung $(\underline{L}) = (\underline{L})^T$ bei leistungsinvarianten Transformation $(\underline{L}) = (\underline{L})^{*T}$ folgt, ergibt die Addition obiger Gleichungen:

$$P_{mech1} = \operatorname{Re} \{ (\underline{i})^{*T}(\underline{E})(\underline{\psi}) \} + \frac{1}{2}(\underline{i})^{*T} \frac{d(\underline{L})}{dt}(\underline{i})$$

$$P_{mech1} = \frac{1}{p} \dot{M}_{11}$$

Erreicht man durch die Transformation, daß $\frac{d}{dt}(\underline{L}) = (0)$ wird, dann gilt

$$P_{mech1} = \operatorname{Re} \{ (\underline{i})^{*T}(\underline{E})(\underline{\psi}) \}$$

Zur Findung geeigneter Transformationsmatrizen wird die unitäre Transformation einer zyklischen Matrix (Z) demonstriert:

$$(Z) = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{pmatrix}$$

charakterist. Gleichung
 $\det[(Z) - \lambda(E)] = 0$
 (E), Einheitsmatrix

$$(X)^{*T}(Z)(X) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$\lambda_{1,2,3}$ Eigenwerte

unitäre Transformationsmatrix:

$$(X) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{a} = e^{j2\pi/3}, \quad (X)^{-1} = (X)^{*T}$$

$$\lambda_1 = A + \underline{a}^2 B + \underline{a} C$$

$$\lambda_2 = A + \underline{a} B + \underline{a}^2 C = \lambda_1^*$$

$$\lambda_3 = A + B + C$$

Sonderfall der zyklischen und symmetrischen Matrix:

$$B = C \quad \leadsto \quad \lambda_1 = \lambda_2 = A - B$$

$$\lambda_3 = A + 2B$$

Anwendung der leistungsinvarianten Transformation auf die Asynchronmaschine:

$$\begin{bmatrix} \underline{u}_S \\ \underline{u}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (C_S) & \\ & \frac{1}{\dot{u}} (C_R) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}'_S \\ \underline{u}'_R \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \underline{i}'_S \\ \underline{i}'_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (C_S) & \\ & \dot{u} (C_R) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_S \\ \underline{i}_R \end{bmatrix}, \quad \dot{u} = \frac{\omega_s \gamma_s}{\omega_R \gamma_R} \frac{1}{\gamma_s}$$

(C_S) und (C_R) sind unitär:

$$(C_S) = (X) \cdot \begin{bmatrix} e^{-j\theta_s} & & \\ & e^{j\theta_s} & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad (C_R) = (X) \cdot \begin{bmatrix} e^{-j\theta_R} & & \\ & e^{j\theta_R} & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

Durch die Wahl von θ_s oder θ_R wird über die Bezugsachse verfügt.

Beide Winkel sind über den Rotorpositionswinkel verknüpft:

$$\theta_R - \theta_s = \theta^*$$

Berechnung der Koeffizientenmatrizen (E) , (L) und (R) :

$$(E) = \begin{bmatrix} (C_S)^{*T} & \\ & \dot{u} (C_R)^{*T} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} (C_S) & \\ & \frac{1}{\dot{u}} (C_R) \end{bmatrix} = j \begin{bmatrix} -j\dot{\theta}_s & & & \\ & j\dot{\theta}_s & & \\ & & 0 & \\ & & & -j\dot{\theta}_R \\ & & & & j\dot{\theta}_R \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$(L) = \begin{bmatrix} (C_S)^{*T} & \\ & \dot{u} (C_R)^{*T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [(L_{SS}) + (S_S)] & (L_{SR}) \\ (L_{SR})^T & [(L_{RR}) + (S_R)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (C_S) & \\ & \dot{u} (C_R) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & & & 14 & & \\ & 22 & & & 25 & \\ & & 33 & & & \\ 41 & & & 44 & & \\ & 52 & & & 55 & \\ & & & & & 66 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} (11) = (22) &= L_s \left(1 + \sigma_{Sii} + \frac{1}{2} - \sigma_{Sik} \right) + S_{Sii} - S_{Sik} \\ &= \frac{3}{2} L_s + \frac{3}{2} L_s \cdot \frac{2}{3} (\sigma_{Sii} - \sigma_{Sik}) + (S_{Sii} - S_{Sik}) \\ &\quad \text{Oberwellenstr.} \quad \text{Nul- u. Störstr.} \\ &= L_{SR} + L_{SS} \end{aligned}$$

$L_{SR} = \frac{3}{2} L_S$ ist die Flusssinduktivität und L_{S0} die Statorstreuinduktivität.

$$\begin{aligned} (33) &= L_S (1 + \sigma_{Sii} - 1 + 2\sigma_{Sik}) + (\sigma_{Sii} + 2\sigma_{Sik}) \\ &= \frac{3}{2} L_S \cdot \frac{2}{3} (\sigma_{Sii} + 2\sigma_{Sik}) + (\sigma_{Sii} + 2\sigma_{Sik}) \\ &= L_{S0} \quad \text{Stator-Nullinduktivität} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (44) = (55) &= \ddot{u}^2 L_R (1 + \sigma_{Rii} + \frac{1}{2} - \sigma_{Rik}) + \ddot{u}^2 (\sigma_{Rii} - \sigma_{Rik}) \\ &= \ddot{u}^2 \frac{3}{2} L_R + \ddot{u}^2 \frac{3}{2} L_R \cdot \frac{2}{3} (\sigma_{Rii} - \sigma_{Rik}) + \ddot{u}^2 (\sigma_{Rii} - \sigma_{Rik}) \\ &= L_{SR} \frac{1}{\chi_1^2} + L_{SR} \frac{1}{\chi_1^2} \cdot \frac{2}{3} (\sigma_{Rii} - \sigma_{Rik}) + \ddot{u}^2 (\sigma_{Rii} - \sigma_{Rik}) \\ &= L_{SR} + \frac{1 - \chi_1^2}{\chi_1^2} L_{SR} + L_{SR} \frac{1}{\chi_1^2} \cdot \frac{2}{3} (\sigma_{Rii} - \sigma_{Rik}) + \ddot{u}^2 (\sigma_{Rii} - \sigma_{Rik}) \\ &\quad \text{Schwägungsstr.} \quad \text{Oberwellenstr.} \quad \text{Nul- u. Störstr.} \\ &= L_{SR} + L'_{R0} \end{aligned}$$

L'_{R0} ist die auf den Stator umgerechnete Rotorstreuinduktivität.

$$\begin{aligned} (66) &= \ddot{u}^2 L_R (1 + \sigma_{Rii} - 1 + 2\sigma_{Rik}) + \ddot{u}^2 (\sigma_{Rii} + 2\sigma_{Rik}) \\ &= \ddot{u}^2 L_R \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} (\sigma_{Rii} + 2\sigma_{Rik}) + \ddot{u}^2 (\sigma_{Rii} + 2\sigma_{Rik}) \\ &= L'_{R0} \quad \text{Rotor-Nullinduktivität, auf den Stator umgerechnet} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (74) &= L_{SR} e^{j\delta_s^*} [\cos\gamma + a^2 \cos(\gamma + \frac{2\pi}{3}) + a \cos(\gamma + \frac{4\pi}{3})] \ddot{u} e^{-j\delta_R} \\ &= \ddot{u} L_{SR} e^{j(\delta_s^* - \delta_R)} \frac{1}{2} [e^{j\delta} (1 + a^2 a + a a^2) + e^{-j\delta} (1 + a^2 a^2 + a a)] \\ &= \ddot{u} L_{SR} \frac{3}{2} \\ &= L_{SR} = (41) = (25) = (52) \end{aligned}$$

Die Wahl von $\ddot{u}$ wurde so getroffen, daß L_{SR} als Wechselinduktivität auftritt. Dadurch tritt im Rotorkreis die Schwägungsstromung auf.

Aus den Teilergebnissen folgt $\frac{d(L)}{dt} = 0$.

Transformierte Widerstandsmatrix:

$$(\underline{R}) = \begin{pmatrix} (R_S) & \\ & \ddot{u}^2(R_R) \end{pmatrix}, \quad \ddot{u}^2 R_R = R_R'$$

Deutung der transformierten Variablen $(\underline{u}_S), (\underline{i}_S), (\underline{u}_R'), (\underline{i}_R')$:

$$(\underline{u}_S) = \begin{pmatrix} \underline{u}_{S1} \\ \underline{u}_{S1}^* \\ \underline{u}_{S0} \end{pmatrix} = (C_S)^{*T} (\underline{u}_S), \quad (\underline{i}_S) = \begin{pmatrix} \underline{i}_{S1} \\ \underline{i}_{S1}^* \\ \underline{i}_{S0} \end{pmatrix} = (C_S)^{*T} (\underline{i}_S)$$

$$(\underline{u}_R') = \begin{pmatrix} \underline{u}_{R1}' \\ \underline{u}_{R1}'^* \\ \underline{u}_{R0}' \end{pmatrix} = \ddot{u} (C_R)^{*T} (\underline{u}_R), \quad (\underline{i}_R') = \begin{pmatrix} \underline{i}_{R1}' \\ \underline{i}_{R1}'^* \\ \underline{i}_{R0}' \end{pmatrix} = \frac{1}{\ddot{u}} (C_R)^{*T} (\underline{i}_R)$$

Die ersten Elemente dieser Vektoren heißen Raumzeiger, die letzten Nullkomponenten;

z.B.: $\underline{u}_{S1} = \frac{1}{\sqrt{3}} (u_{S1} + a u_{S2} + a^2 u_{S3}) e^{j\omega t}$

$$u_{S0} = \frac{1}{\sqrt{3}} (u_{S1} + u_{S2} + u_{S3})$$

Jedes beliebige Dreiphasensystem wird durch einen komplexen Raumzeiger und eine reelle Nullkomponente beschrieben. Der Raumzeiger ist dabei von der Wahl der Bezugachse abhängig.

Beispiel eines symmetrischen sinusf. Drehspannungssystems:

$$\begin{pmatrix} u_{S1} \\ u_{S2} \\ u_{S3} \end{pmatrix} = \sqrt{2} U_S \begin{pmatrix} \cos \omega_S t \\ \cos (\omega_S t - 2\pi/3) \\ \cos (\omega_S t - 4\pi/3) \end{pmatrix}$$

$$\underline{u}_{S1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2} U_S \frac{1}{2} [(1 + a a^2 + a^2 a) e^{j\omega_S t} + (1 + a a + a^2 a^2) e^{-j\omega_S t}] e^{j\omega_S t}$$

$$\underline{u}_{S1} = \frac{\sqrt{3}}{2} U_S e^{j(\omega_S t + \pi/6)}$$

Für $u_{S0} = 0$ beschreibt der Raumzeiger in der komplexen Ebene

mit der Winkelschwindigkeit ω_S einen Kreis:

$$\underline{u}_{s1} = \frac{\sqrt{3}}{2} U_s e^{j\omega_s t}$$

Für $\gamma_s = -\omega_s t$, d.h. bei mit ω_s relativ zum Stator mathem. positiv umlaufender Bezugspachse, wird der Raumvektor zeitlich konstant und reell:

$$\underline{u}_{s1} = \frac{\sqrt{3}}{2} U_s$$

Die Nullkomponente verschwindet bei einem symmetrischen sinusförmigen Dreiphasensystem:

$$u_{s0} = 0.$$

Nachtrag zu der Transformation der Induktivitäten (S.18):

$$\frac{2}{3}(\sigma_{sii} - \sigma_{sik}) = \sigma_{os} = \sum_{v=2}^{\infty} \left(\frac{\xi_{sv}}{v \varphi_{s1}} \right)^2 \frac{2}{3} (1 - \cos v \frac{2\pi}{3})$$

von null verschiedene Glieder der Reihe

nur für $v = 5, 7, 11, 13, \dots$

$$\frac{2}{3}(\sigma_{sii} + 2\sigma_{dik}) = \sigma_{os0} = \sum_{v=2}^{\infty} \left(\frac{\xi_{sv}}{v \varphi_{s1}} \right)^2 \frac{2}{3} (1 + 2 \cos v \frac{2\pi}{3})$$

von null verschiedene Glieder der Reihe

nur für $v = 3, 9, 15, 21, \dots$

Entsprechendes gilt für die Oberwellenziffern

σ_{or} und σ_{or0} des Rotors.

Transformiertes Spannungsgleichungssystem der Asynchronmaschine:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{S1} \\ \underline{U}_{S1}^* \\ \underline{U}_{S0} \\ \underline{U}'_{R1} \\ \underline{U}'_{R1}^* \\ \underline{U}'_{R0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S & & & & & \\ & R_S & & & & \\ & & R_S & & & \\ & & & R'_R & & \\ & & & & R'_R & \\ & & & & & R'_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}'_{S1} \\ \underline{i}'_{S1}^* \\ \underline{i}'_{S0} \\ \underline{i}'_{R1} \\ \underline{i}'_{R1}^* \\ \underline{i}'_{R0} \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} -jS & & & & & \\ & jS & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & -jR & & \\ & & & & jR & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\psi}_{S1} \\ \underline{\psi}_{S1}^* \\ \underline{\psi}_{S0} \\ \underline{\psi}'_{R1} \\ \underline{\psi}'_{R1}^* \\ \underline{\psi}'_{R0} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underline{\psi}_{S1} \\ \underline{\psi}_{S1}^* \\ \underline{\psi}_{S0} \\ \underline{\psi}'_{R1} \\ \underline{\psi}'_{R1}^* \\ \underline{\psi}'_{R0} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\psi}_{S1} \\ \underline{\psi}_{S1}^* \\ \underline{\psi}_{S0} \\ \underline{\psi}'_{R1} \\ \underline{\psi}'_{R1}^* \\ \underline{\psi}'_{R0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{S1}+L_{S0} & & & L_{S1} & & \\ & L_{S1}+L_{S0} & & & L_{S1} & \\ & & L_{S0} & & & \\ L_{S1} & & & L_{S1}+L'_{R0} & & \\ & L_{S1} & & & L_{S1}+L'_{R0} & \\ & & & & & L'_{R0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}'_{S1} \\ \underline{i}'_{S1}^* \\ \underline{i}'_{S0} \\ \underline{i}'_{R1} \\ \underline{i}'_{R1}^* \\ \underline{i}'_{R0} \end{bmatrix}$$

Die 2. und die 5. Gleichung werden für die Lösung nicht gebraucht.

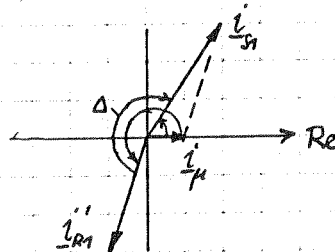
Treten keine Nullkomponenten auf, dann verbleiben nur die 1. und die 4. Gleichung.

Die Berechnung des inneren Drehmoments nach S. 15 ergibt:

$$M_{i1} = \frac{p}{j} \operatorname{Re} \{ (\underline{i})^* (F)(\underline{\psi}) \}$$

$$M_{i1} = 2p L_{S1} \operatorname{Im} \{ \underline{i}'_{S1} \underline{i}'_{R1}^* \}$$

$$M_{i1} = 2p L_{S1} |\underline{i}'_{S1}| |\underline{i}'_{R1}| \sin \Delta$$



Zusammen mit der mechanischen Gleichung ist das Maschinenmodell vollständig beschrieben.

Sonderfall des stationären Betriebs bei kurzgeschlossenem Rotor ($\underline{U}'_{R1} = 0, \underline{U}'_{R0} = 0$), konstante Drehzahl ($j = \text{const.}$) und Statorspannung nach S. 19 unten:

$$\begin{aligned} \text{Wahl der Bezugachse} \quad j'_S &= -\omega_S t, & j'_R &= -\omega_S t + j \\ j'_S &= -\omega_S, & j'_R &= -(\omega_S - j) \end{aligned}$$

$$\underline{u}_{S1} = \frac{\sqrt{3}}{2} U_S, \quad \underline{u}_{S0} = 0, \quad \text{damit aus der 3. Gleichung bei verschwindendem Anfangswert: } \underline{i}'_{S0} = 0; \\ \text{ebenso liefert die 6. Gl. aus } \underline{u}'_{R0} = 0: \underline{i}'_{R0} = 0.$$

Die 1. und die 4. Gl. ergeben für den stationären Fall:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} U_S = R_S \underline{i}_{S1} + j\omega_S \underline{\psi}_{S1}$$

$$0 = R_R' \underline{i}_{R1}' + j(\omega_S - j') \underline{\psi}_{R1}', \quad \omega_S - j' = s\omega_S$$

Diese beiden Gleichungen führen zu dem klassischen Ersatzschaltbild.

Lösungsansätze: $\underline{i}_{S1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{I}_S$, $\underline{I}_S = I_S e^{-j\varphi_S}$

$$\underline{i}_{R1}' = \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{I}_R', \quad \underline{I}_R' = I_R' e^{-j\varphi_R'}$$

Die Rücktransformation nach S.17 oben führt zu den Zeitwerten der Ströme:

$$(\underline{i}_S) = (C_S)(\underline{i}_{S1}) = (X) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} \underline{I}_S \\ \underline{I}_S^* \\ 0 \end{pmatrix}$$

$e^{j\omega_S t}$		
	$e^{-j\omega_S t}$	
		1

$$(\underline{i}_S) = \sqrt{2} I_S \begin{pmatrix} \cos(\omega_S t - \varphi_S) \\ \cos(\omega_S t - \varphi_S - 2\pi/3) \\ \cos(\omega_S t - \varphi_S - 4\pi/3) \end{pmatrix}$$

$$(\underline{i}_R) = \ddot{u}(C_R)(\underline{i}_{R1}') = \ddot{u}(X) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} \underline{I}_R' \\ \underline{I}_R'^* \\ 0 \end{pmatrix}$$

$e^{j\omega_S t}$		
	$e^{j\omega_S t}$	
		1

$$(\underline{i}_R) = \sqrt{2} \ddot{u} I_R' \begin{pmatrix} \cos(s\omega_S t - \varphi_R') \\ \cos(s\omega_S t - \varphi_R' - 2\pi/3) \\ \cos(s\omega_S t - \varphi_R' - 4\pi/3) \end{pmatrix}$$

I_S , φ_S , I_R' und φ_R' sind aus den beiden obigen komplexen Gleichungen zu bestimmen.

Andere Schreibweisen für das innere Drehmoment von S. 21:

a) aus der Flußbeziehung:

$$\underline{i}'_{-R1} = \frac{1}{L_{sh}} \underline{\psi}_{-s1} - \frac{L_{sh} + L_{so}}{L_{sh}} \underline{i}'_{-s1},$$

Einsetzen in M_{i1} ergibt:

$$M_{i1} = 2p \operatorname{Im} \left\{ \underline{i}'_{-s1} \underline{\psi}_{-s1}^* \right\}.$$

Diese Version eignet sich zur Bestimmung von M_{i1} aus gemessenen Statorgrößen (Bezugssystem $\gamma_s = 0$).

$\underline{\psi}_{-s1}$ gewinnt man mittels Integration aus der Statorgleichung

$$\underline{u}_{-s1} = R_s \underline{i}'_{-s1} + \dot{\underline{\psi}}_{-s1};$$

$\underline{u}_{-s1}$ und $\underline{i}'_{-s1}$ sind meßbar ($\gamma_s = 0$).

Durch Aufspalten in Real- und Imaginärteil

$$\underline{i}'_{-s1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (i'_{sp} + j i'_{sq})$$

$$\underline{\psi}_{-s1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{sp} + j \psi_{sq})$$

findet man die in der Literatur häufig anzutreffende Form

$$M_{i1} = p (\psi_{sp} i'_{sq} - \psi_{sq} i'_{sp}).$$

b) aus der Flußbeziehung:

$$\underline{i}'_{-s1} = \frac{1}{L_{sh}} \underline{\psi}'_{-R1} - \frac{L_{sh} + L_{rs}}{L_{sh}} \underline{i}'_{-R1},$$

Einsetzen in M_{i1} ergibt:

$$M_{i1} = 2p \operatorname{Im} \left\{ \underline{\psi}'_{-R1} \underline{i}'_{-R1}^* \right\}.$$

Diese Version ermöglicht die Bestimmung von M_{i1} aus gemessenen Rotorgrößen (geeignet bei Rotorpeisung von Schleifringläufern, Bezugssystem $\gamma_r = 0$).

c) $M_{i1} = 2p \frac{1-\sigma}{\sigma L_{sh}} \operatorname{Im} \left\{ \underline{\psi}_{-s1} \underline{\psi}_{-R1}^* \right\}$ (vgl. S. 40!).

Allgemeines zur Wahl des Bezugssystems (Beispiele):

a) $\dot{\gamma}_S = 0$, $\dot{\gamma}_R = \dot{\gamma}$ (C_S) zeitinvariant
 $\ddot{\gamma}_S = 0$, $\ddot{\gamma}_R = \ddot{\gamma}$ im Stator keine „rotator. Spannungen“

Speisung nach S. 19 unten: $\underline{u}_{S1} = \sqrt{\frac{3}{2}} U_S e^{j\omega_S t}$

Im stationären Betrieb sind auch $\underline{i}_{S1}$ und $\underline{i}'_{R1}$ mit ω_S umlaufende Raumzeiger konstanten Betrags

b) $\dot{\gamma}_R = 0$, $\dot{\gamma}_S = -\dot{\gamma}$ (C_R) zeitinvariant
 $\ddot{\gamma}_R = 0$, $\ddot{\gamma}_S = -\ddot{\gamma}$ im Rotor keine „rotator. Spannungen“

Speisung nach S. 19 unten: $\underline{u}_{S1} = \sqrt{\frac{3}{2}} U_S e^{j(\omega_S t - \gamma)}$

Bei einem Übergangsvorgang folgt γ erst aus der zweimaligen Integration der mechan. Gleichung.

Im stationären Betrieb ($\gamma = \dot{\gamma}t$, $\dot{\gamma} = \text{const}$) sind $\underline{u}_{S1}$, $\underline{i}_{S1}$ und $\underline{i}'_{R1}$ mit $\omega_S - \dot{\gamma} = \omega$ umlaufende Raumzeiger konstanten Betrags.

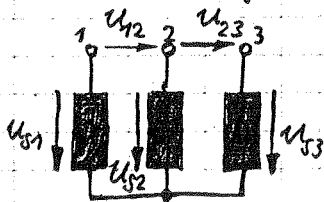
c) $\dot{\gamma}_S = -\omega_S t + \gamma_{S0}$, $\dot{\gamma}_R = -\omega_S t + \gamma + \gamma_{S0}$
 $\ddot{\gamma}_S = -\omega_S$, $\ddot{\gamma}_R = -(\omega_S - \dot{\gamma}) = -\omega$

Speisung nach S. 19 unten: $\underline{u}_{S1} = \sqrt{\frac{3}{2}} U_S e^{j\gamma_{S0}}$ (z.B. $\gamma_{S0} = 0$)

Im stationären Betrieb sind auch $\underline{i}_{S1}$ und $\underline{i}'_{R1}$ zeitlich konstante Raumzeiger.

Zusammenhang zwischen der Schaltung und dem Auftreten von Nullkomponenten:

a) Sternschaltung:



$i'_{S0} = 0$, daraus folgt aus der 3. Gl. des Systems von S. 21: $u_{S0} = 0$,
damit und 2 Maschengleichungen gewinnt man die Strangspannungen:

$$\begin{bmatrix} u_{S1} \\ u_{S2} \\ u_{S3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2u_{12} + u_{23} \\ -u_{12} + u_{23} \\ -u_{12} - 2u_{23} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} u_{12} + u_{23} \\ u_{21} + u_{23} \\ u_{31} + u_{32} \end{bmatrix}$$

b). Dreieckschaltung:

$u_{s0} = 0$, daraus folgt aus der 3. Gl. des Systems von S.21

bei verschwindendem Anfangswert: $i_{s0} = 0$.

Da die Annahme einer Grundwellenmaschine (vergl. S.12!) bei realen Maschinen nicht exakt erfüllt ist, wird bei Sternschaltung eine Nullspannung und bei Dreieckschaltung ein Nullstrom - verursacht durch räumliche höhere Harmonische des Luftspaltfelds - auftreten können.

3. Speisung der Drehstromasynchronmaschine mit nichtsinusförmigem Spannungs- oder Stromsystem

Speisung der Asynchronmaschine mit einem nichtsinusförmigen symmetrischen Drehspannungssystem (z.B. Umrichterpeisung):

$$u_{si} = \sqrt{2} \sum_{v=1}^{\infty} U_{sv} \cos \left\{ v \left[\omega_s t - (i-1) \frac{2\pi}{3} \right] + \varphi_v \right\} ; \quad i = 1, 2, 3$$

Die Berechnung des Raumzeigers und der Nullkomponente nach S.19 ergibt mit $\underline{U}_{sv} = U_{sv} e^{j\varphi_v}$:

$$\underline{u}_{s1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ \underline{U}_{s1} e^{j\omega_s t} + \underline{U}_{s4} e^{j4\omega_s t} + \underline{U}_{s7} e^{j7\omega_s t} + \underline{U}_{s10} e^{j10\omega_s t} + \dots \right. \\ \left. \dots + \underline{U}_{s2}^* e^{-j2\omega_s t} + \underline{U}_{s5}^* e^{-j5\omega_s t} + \underline{U}_{s8}^* e^{-j8\omega_s t} + \underline{U}_{s11}^* e^{-j11\omega_s t} + \dots \right\} e^{j\frac{1}{2}\omega_s t}$$

Der Raumzeiger enthält die nicht durch 3 teilbaren Ordnungen v ; es treten positiv und negativ drehende Raumzeigerkomponenten auf.

$$u_{s0} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \operatorname{Re} \left\{ \underline{U}_{s3} e^{j3\omega_s t} + \underline{U}_{s6} e^{j6\omega_s t} + \underline{U}_{s9} e^{j9\omega_s t} + \dots \right\}$$

Die Nullkomponente enthält nur die durch 3 teilbaren Ordnungen v .

Bei Dreieckschaltung ist schaltungsbedingt $u_{s0} = 0$, d.h. durch 3 teilbare Ordnungen v können nicht auftreten.

Bei Sternschaltung (mit freiem Sternpunkt) hat die Nullkomponente u_{s0} schaltungsbedingt keinen Nullstrom zur Folge.

Wählt man $t_s = -\omega_s t$ dann wird der Grundschwingungsanteil in $\underline{u}_{s1}$ konstant

und die Frequenzen der Oberschwingungsanteile werden durch 3 teilbare

Vielfache von ω_s .

$$u_{si} = \sqrt{2} \frac{1}{2} \sum_{v=1}^{\infty} \left[\underline{u}_{sv} \underline{a}^{-(i-1)v} e^{jv\omega_s t} + \underline{u}_{sv}^* \underline{a}^{(i-1)v} e^{-jv\omega_s t} \right] ; i=1,2,3$$

$$\underline{u}_{s1} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\underline{u}_{s1} + \underline{a} \underline{u}_{s2} + \underline{a}^2 \underline{u}_{s3}) e^{j\omega_s t}$$

$$\underline{u}_{s1v} = \sqrt{2} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{3}} 3 \left[\frac{1}{3} (1 + \underline{a}^{1-v} + \underline{a}^{2(1-v)}) \underline{u}_{sv} e^{jv\omega_s t} + \frac{1}{3} (1 + \underline{a}^{1+v} + \underline{a}^{2(1+v)}) \underline{u}_{sv}^* e^{-jv\omega_s t} \right] e^{j\omega_s t}$$

$$\underline{u}_{s1} = \sum_{v=1}^{\infty} \underline{u}_{s1v}$$

$$u_{s0} = \frac{1}{\sqrt{3}} (u_{s1} + u_{s2} + u_{s3})$$

$$u_{sov} = \sqrt{2} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 3 \cdot 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{3} (1 + \underline{a}^{-v} + \underline{a}^{-2v}) \underline{u}_{sv} e^{jv\omega_s t} \right\}$$

$$u_{s0} = \sum_{v=1}^{\infty} u_{sov}$$

Gewinnung der Zeitwerte aus dem Raumvektor durch Projektion:

Voraussetzung $u_{s0} = 0$

$$\begin{bmatrix} u_{s1} \\ u_{s2} \\ u_{s3} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} \\ \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-j\omega_s t} & \\ & e^{j\omega_s t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_{s1} \\ \underline{u}_{s1}^* \end{bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Re} \begin{bmatrix} \underline{u}_{s1} e^{-j\omega_s t} \\ \underline{a}^2 \underline{u}_{s1} e^{-j\omega_s t} \\ \underline{a} \underline{u}_{s1} e^{-j\omega_s t} \end{bmatrix}$$

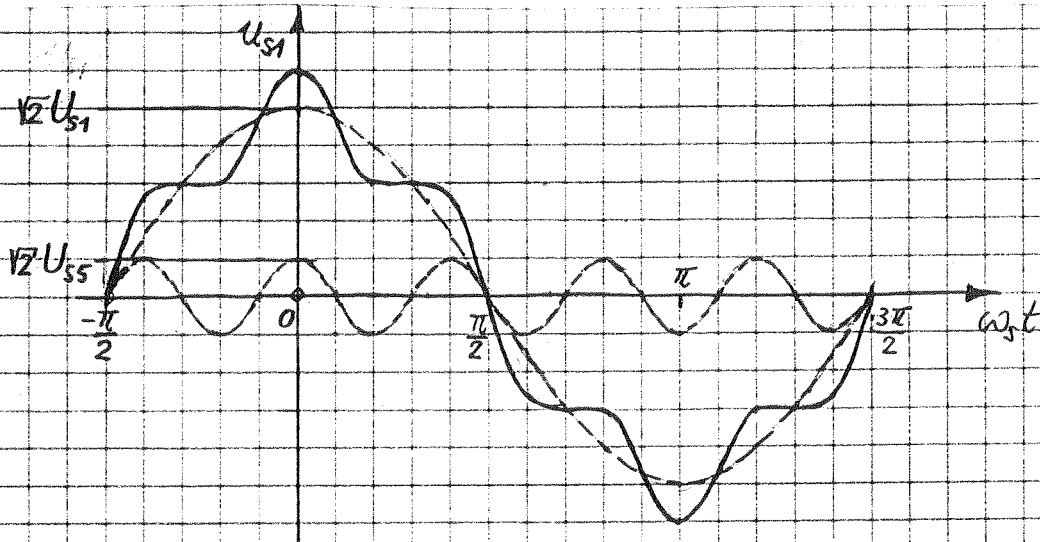
$$\begin{bmatrix} u_{s1} \\ u_{s2} \\ u_{s3} \end{bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Re} \begin{bmatrix} \underline{u}_{s1} (e^{j\omega_s t})^* \\ \underline{u}_{s1} (\underline{a} e^{j\omega_s t})^* \\ \underline{u}_{s1} (\underline{a}^2 e^{j\omega_s t})^* \end{bmatrix}$$

Beispiel: $\gamma_s = 0$

Beispiel zum Rangkörper: symmetrisches Spannungssystem
mit 1. und 5. Harmonischen:

$$u_{si} = \sqrt{2} U_{s1} \cos[\omega_s t - (i-1)\frac{2\pi}{3}] + \sqrt{2} U_{s5} \cos[5\omega_s t - 5(i-1)\frac{2\pi}{3}]$$

$$i = 1, 2, 3$$



$$U_{s1} = U_{s1}$$

$$U_{s5} = U_{s5}$$

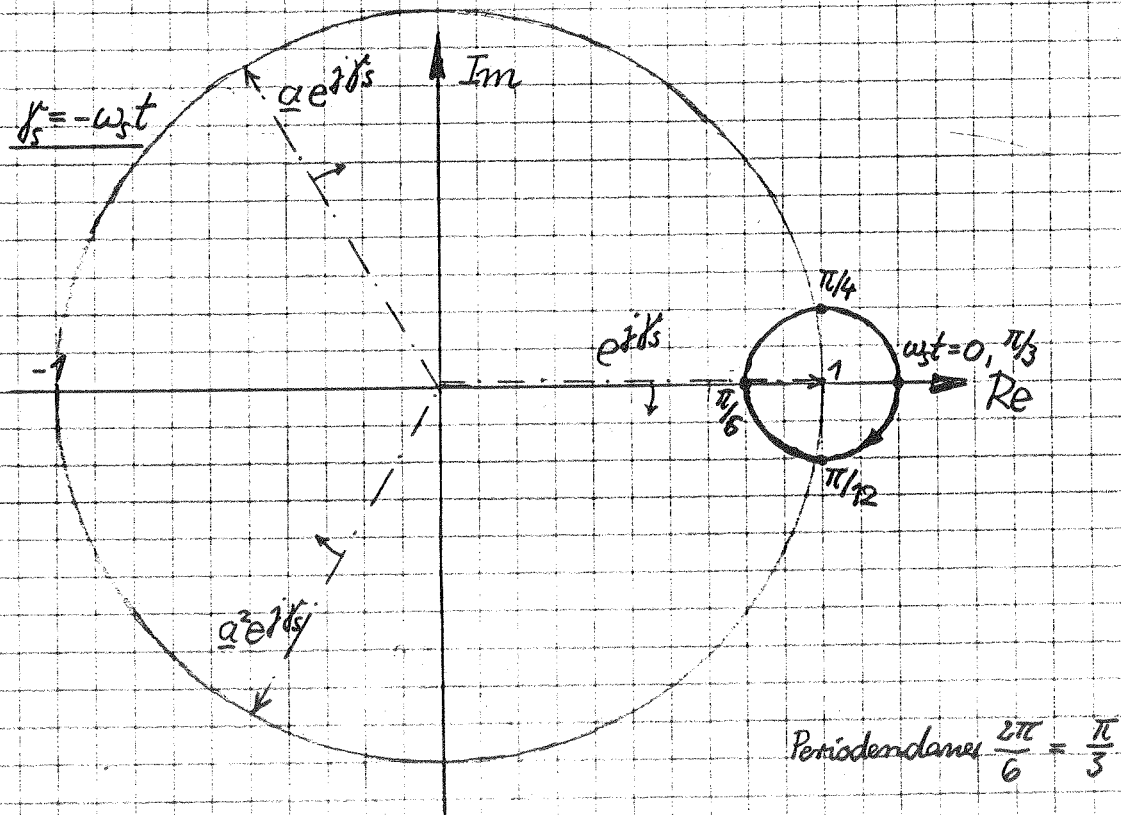
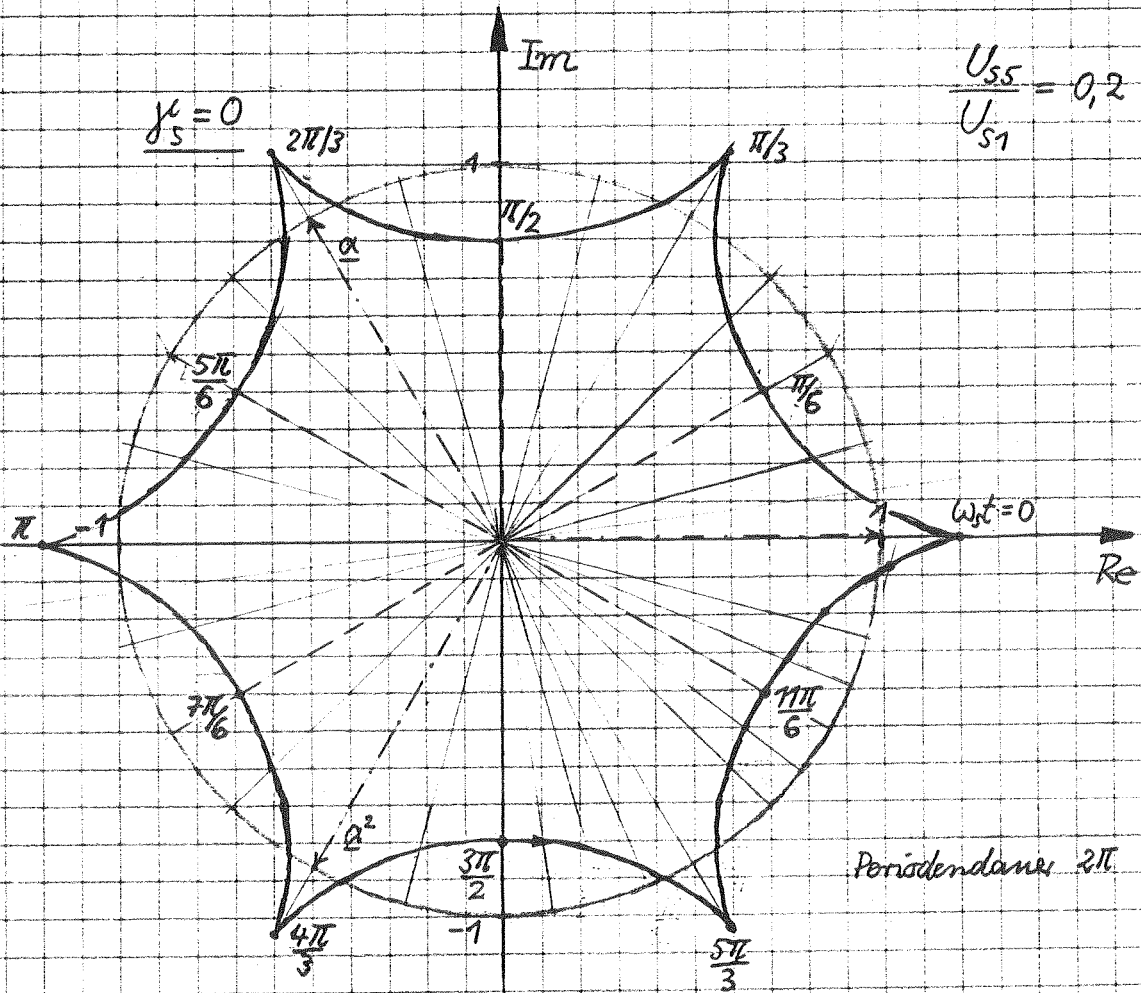
$$\underline{u}_{s1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ U_{s1} e^{j\omega_s t} + U_{s5} e^{-j5\omega_s t} \right\} e^{j\theta_s}$$

$$\underline{\theta_s} = 0: \quad \underline{u}_{s1} = \frac{\sqrt{3}}{2} U_{s1} \left\{ e^{j\omega_s t} + \frac{U_{s5}}{U_{s1}} e^{-j5\omega_s t} \right\}$$

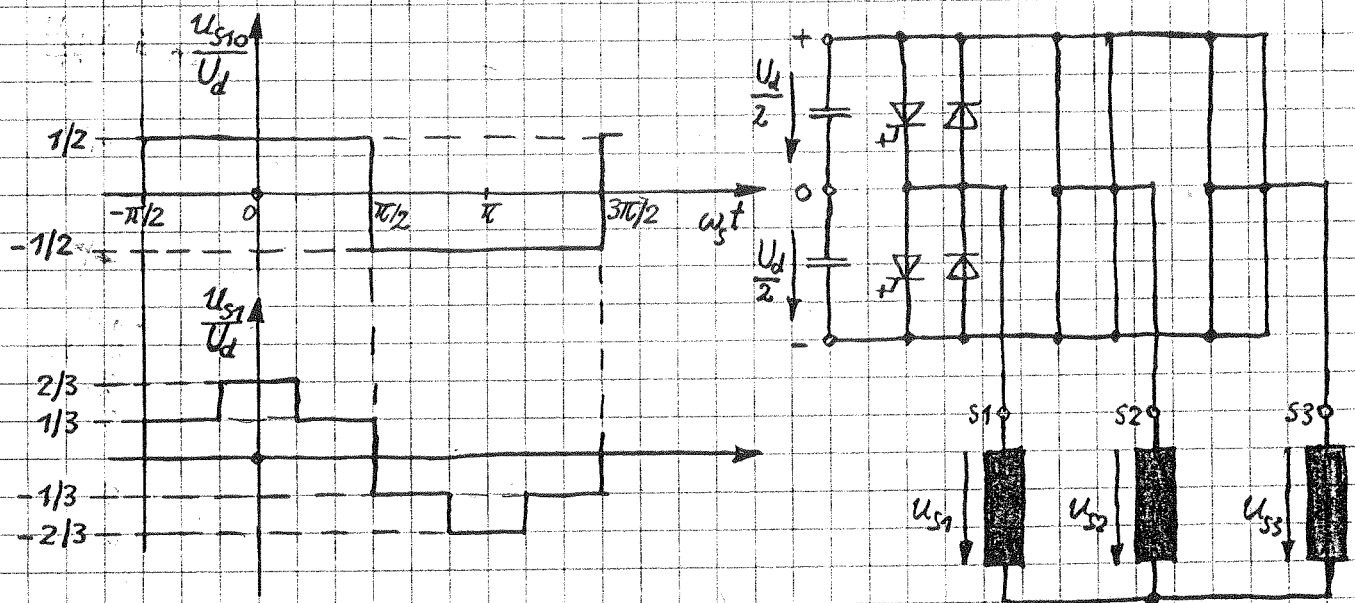
$$\underline{\theta_s} = -\omega_s t: \quad \underline{u}_{s1} = \frac{\sqrt{3}}{2} U_{s1} \left\{ 1 + \frac{U_{s5}}{U_{s1}} e^{-j6\omega_s t} \right\}$$

$$\text{Periode } \Delta\omega_s t = \pi/3$$

Orbitenkurve des Raumzeigers $\underline{u}_{s1}$ bezogen auf $\sqrt{\frac{3}{2}} U_{s1}$:



Blocktaktung od. Grundfrequenztaktung:



$$u_{s10} = \frac{1}{2} U_d \frac{4}{\pi} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{2v-1} \cos(2v-1) \left[\omega_s t - (i-1) \frac{2\pi}{3} \right] \quad ; \quad i=1,2,3$$

u_{s1}		2	-1	-1	u_{s10}
u_{s2}	$= \frac{1}{3}$	-1	2	-1	u_{s20}
u_{s3}		-1	-1	2	u_{s30}

$$u_{s10} = \frac{2}{\pi} U_d \frac{1}{2} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{2v-1} \left[\underline{a}^{-(2v-1)(i-1)} e^{j(2v-1)\omega_s t} + \underline{a}^{(2v-1)(i-1)} e^{-j(2v-1)\omega_s t} \right]$$

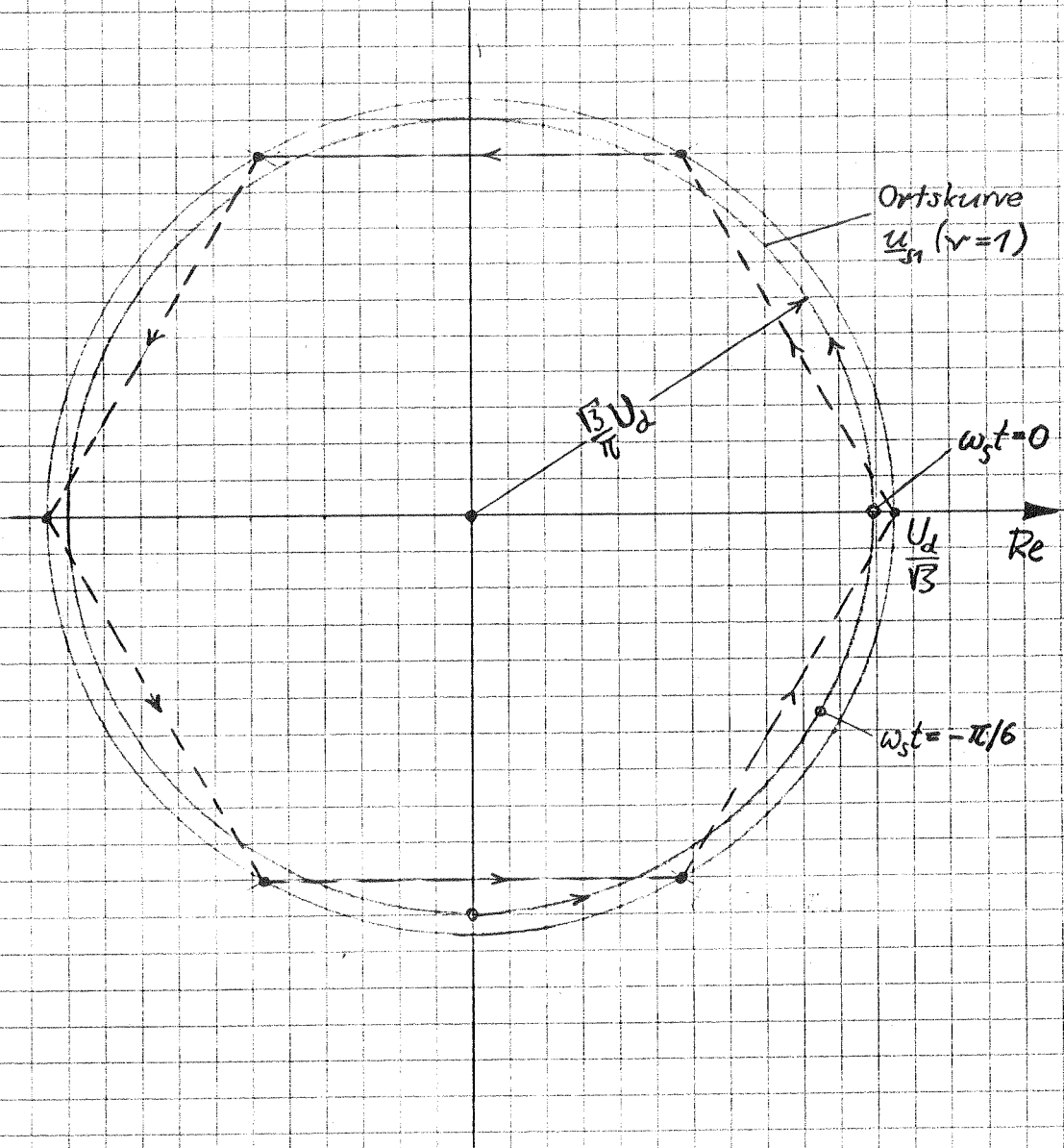
$$u_{si} = \frac{2}{\pi} U_d \frac{1}{2} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{2v-1} \left[\frac{1}{3} (2 - \underline{a}^{-(2v-1)} - \underline{a}^{-2(2v-1)}) \underline{a}^{-(2v-1)(i-1)} e^{j(2v-1)\omega_s t} + \right. \\ \left. \frac{1}{3} (2 - \underline{a}^{2v-1} - \underline{a}^{2(2v-1)}) \underline{a}^{(2v-1)(i-1)} e^{-j(2v-1)\omega_s t} \right]$$

$$\underline{u}_{s1} = \frac{1}{\sqrt{3}} (u_{s1} + \underline{a} u_{s2} + \underline{a}^2 u_{s3}) e^{j\theta_s}$$

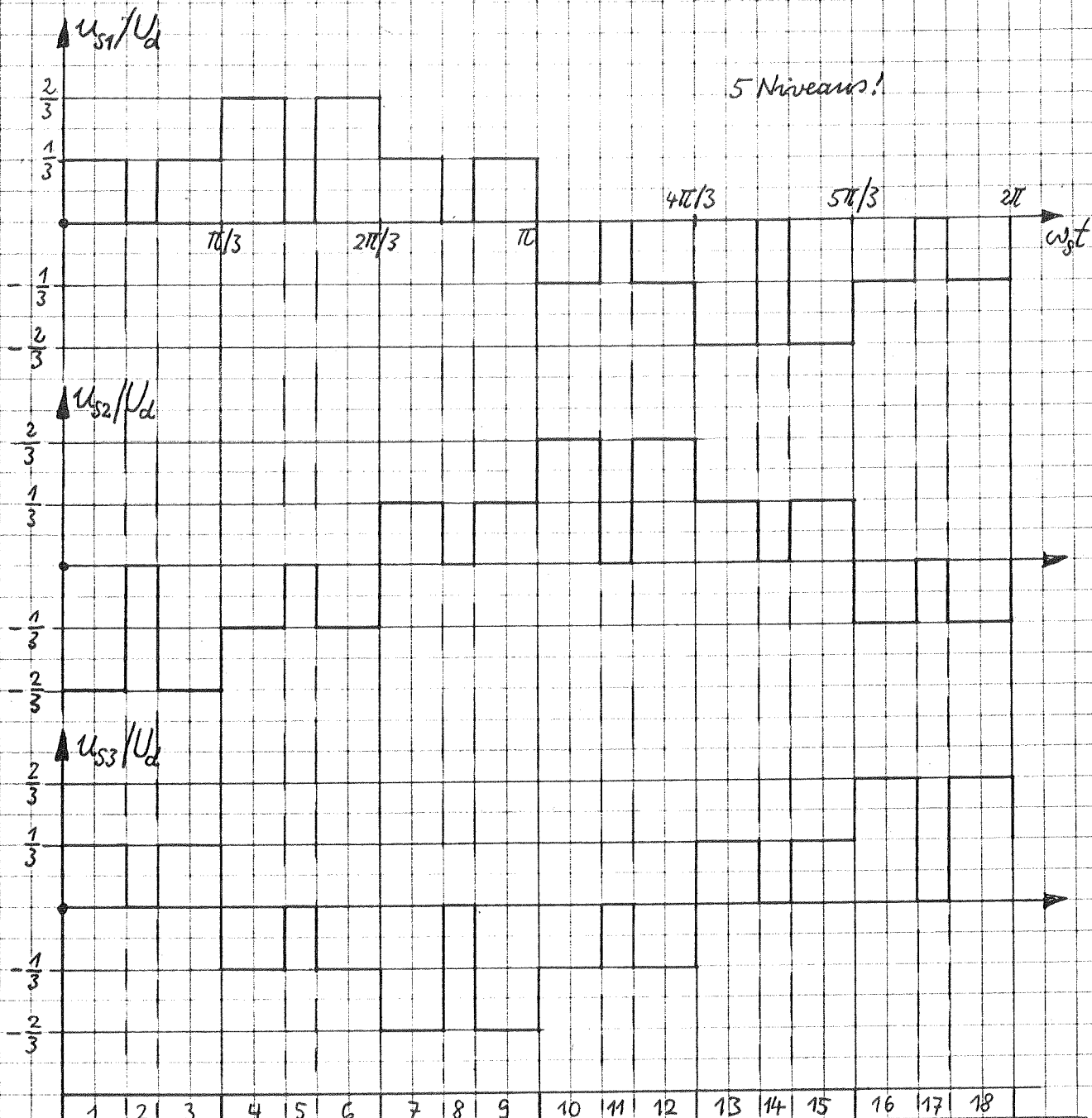
$$\underline{u}_{s1} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} U_d \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{2v-1} \left[\frac{1}{3} (1 + \underline{a}^{-2(v-1)} + \underline{a}^{-4(v-1)}) e^{j(2v-1)\omega_s t} + \right. \\ \left. \frac{1}{3} (1 + \underline{a}^{2v} + \underline{a}^{4v}) e^{-j(2v-1)\omega_s t} \right] e^{j\theta_s}$$

$$\underline{u}_s = \frac{\sqrt{3}}{\pi} U_d \left[e^{j\omega_s t} + \frac{1}{7} e^{j7\omega_s t} + \frac{1}{13} e^{j13\omega_s t} + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{5} e^{-j5\omega_s t} + \frac{1}{11} e^{-j11\omega_s t} + \frac{1}{17} e^{-j17\omega_s t} + \dots \right] e^{j\delta_s}$$

$\delta_s = 0$:



Statorspannungsraumzeiger bei Umrichterspeisung
(Dreifachleitung): Zweipunktwechselrichter



z.B.: $u_{s1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{U_d}{3} (1 - 2a + a^2) e^{j\gamma_s} = \frac{U_d}{\sqrt{3}} e^{j(\gamma_s + 5\pi/3)}$

$\gamma_s = 0: u_{s1} = \frac{U_d}{\sqrt{3}} e^{j5\pi/3}$

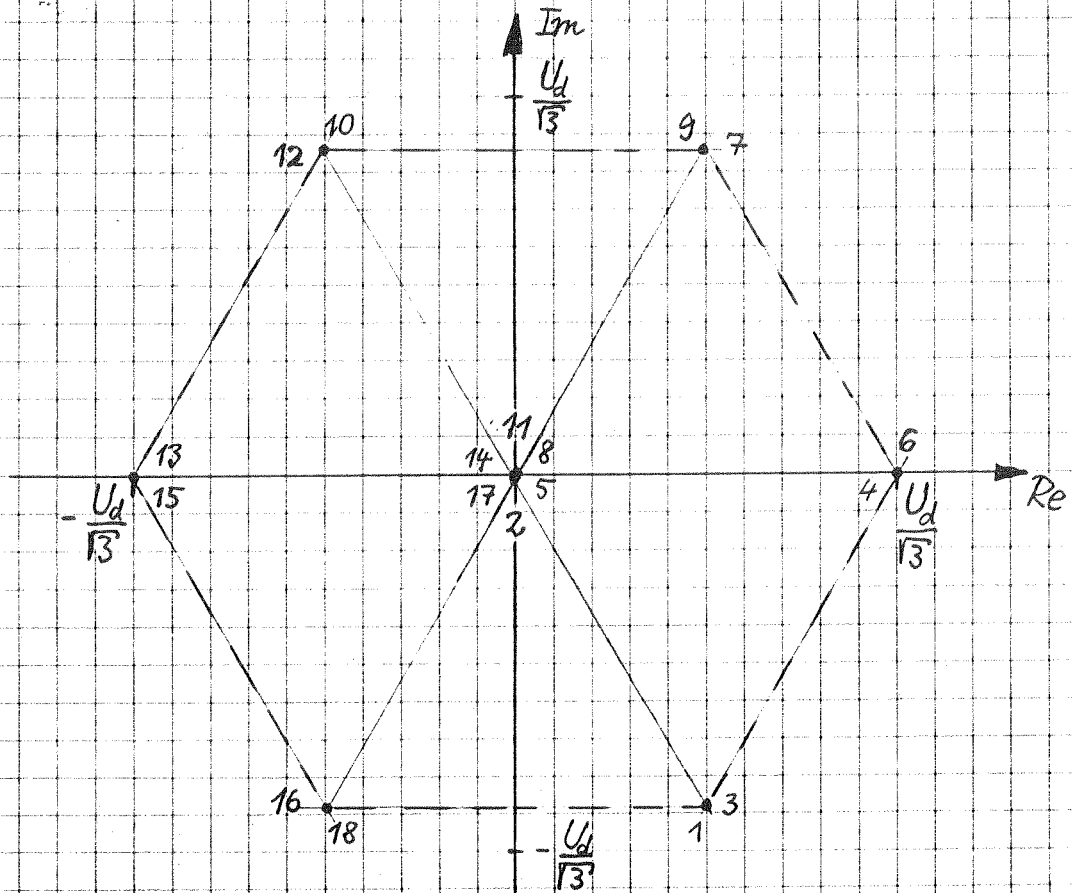
$\gamma_s = -\omega_s t + \pi/2: u_{s1} = \frac{U_d}{\sqrt{3}} e^{j(-\omega_s t + \pi/6)}$

$u_{-s1} = \frac{1}{\sqrt{3}} (u_{s1} + a u_{s2} + a^2 u_{s3}) e^{j\gamma_s}$

(Bildung obiger Phasenspannungen siehe
„Elektrische Maschinen und Stromrichter“ Kapitel 3.4.4!)

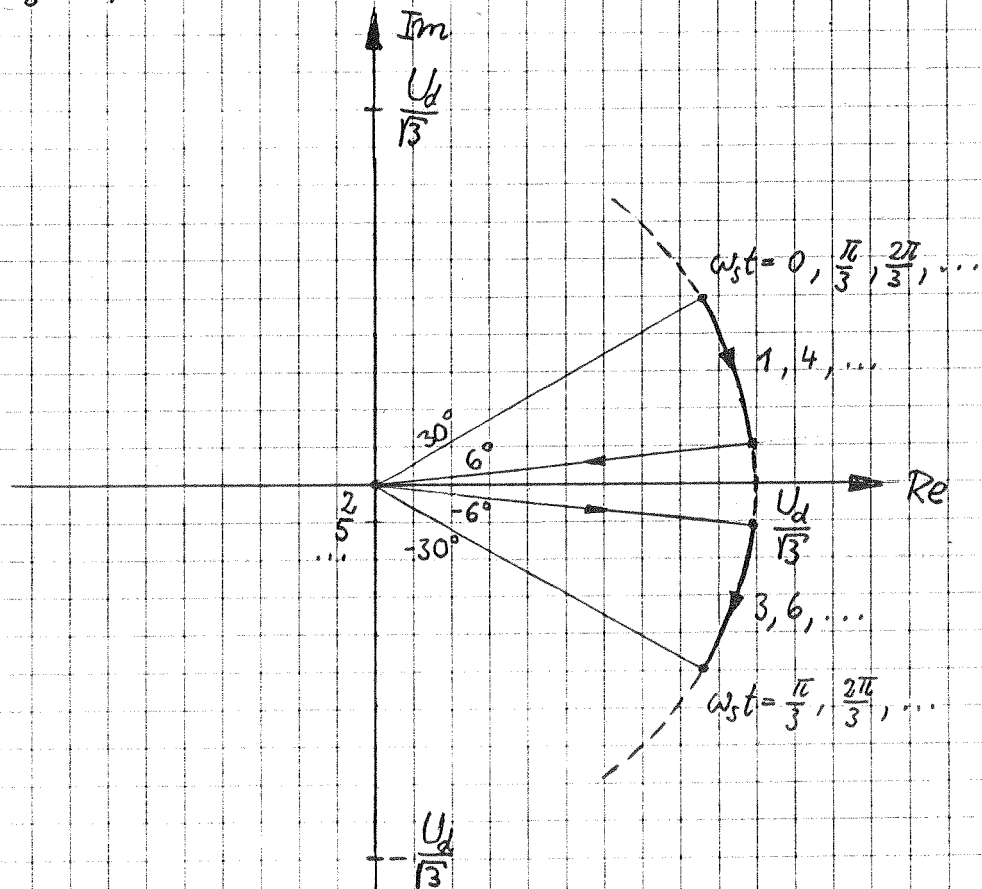
a) $y_s = 0$

Periodendauer 2π



b) $y_s = -\omega_s t + \pi/2$

Periodendauer $\pi/3$



Stationärer Betrieb bei nichtsinusförmiger symmetrischer Speisung:

$$\dot{j} = 0, \quad \underline{u}_{s1} \text{ nach S. 25 gegeben}$$

Anwendung des Superpositionsprinzips auf das lineare System von S. 21

$$\underline{u}_{s1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{U}_{sv} e^{jk\varphi_{sv}} e^{j(kv\omega_s t + \varphi_s)}$$

$$k = \begin{cases} 1 & \text{für } v = 1, 4, 7, 10, \\ -1 & \text{für } v = 2, 5, 8, 11, \end{cases}$$

Bezugssystem: $\varphi_s = 0, \quad \varphi_R = \varphi_s + \varphi = \varphi = \varphi^t + \varphi_0 = (1-s)\omega_s t + \varphi_0$

stationäre Lösungsansätze:

$$\underline{i}_{sv} = \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{I}_{sv} e^{jk\varphi_{sv}} e^{jkr\omega_s t}$$

$$\underline{I}_{sv} = \underline{I}_{sv} e^{j\varphi_{sv}}$$

$$\underline{i}'_{rv} = \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{I}'_{rv} e^{jk\varphi_{rv}} e^{jkr\omega_s t}$$

$$\underline{I}'_{rv} = \underline{I}'_{rv} e^{j\varphi_{rv}}$$

Transformation ins rotorfixe Bezugssystem:

$$\underline{i}'_{rv} e^{-j\varphi_R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{I}'_{rv} e^{jk\varphi_{rv}} e^{j[kr\omega_s t - (1-s)\omega_s t - \varphi_0]}$$

↗ Frequenzen der Harmonischen im Rotorstrom:

v	1	5	7	...
$(kv-1+s)\omega_s$	$3\omega_s$	$(-6+3)\omega_s$	$(6+3)\omega_s$	$\dots$

$$M_{in} = 2p L_{\Sigma} \operatorname{Im} \{ \underline{i}_{s1} \underline{i}_{r1}^* \} \quad \text{nach S. 20}$$

$$M_{in} = 3p L_{\Sigma} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{v=1}^{\infty} \underline{I}_{sv} e^{jk_v\varphi_{sv}} e^{jkr_v\omega_s t} \sum_{\mu=1}^{\infty} \underline{I}'_{r\mu} e^{-jk_{\mu}\varphi_{r\mu}} e^{jkr_{\mu}\omega_s t} \right\}$$

$$v=\mu \quad \text{↗ asynchrone Momente} \sim \operatorname{Im} \{ \underline{I}_{sv} e^{jk_v\varphi_{sv}} \underline{I}'_{r\mu} e^{-jk_{\mu}\varphi_{r\mu}} \}$$

$$v \neq \mu \quad \text{↗ Pendelmomente} \sim \operatorname{Im} \{ \underline{I}_{sv} e^{jk_v\varphi_{sv}} \underline{I}'_{r\mu} e^{-jk_{\mu}\varphi_{r\mu}} e^{j(k_v - k_{\mu})\omega_s t} \}$$

v	μ	$(k_v v - k_{\mu} \mu) \omega_s$
1	5	$(1+5)\omega_s = 6\omega_s$
1	7	$(1-7)\omega_s = -6\omega_s$
5	1	$(-5-1)\omega_s = -6\omega_s$
7	1	$(7-1)\omega_s = 6\omega_s$
5	7	$(-5-7)\omega_s = -12\omega_s$
7	5	$(7+5)\omega_s = 12\omega_s$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Symmetrische nichtsinusförmige Speisung der Asynchronmaschine:

stationär $j=0$

$$j_s=0 \quad U_{sv} = R_s I_{sv} + (L_{sh} + L_{so}) j v \omega_s I_{sv} + L_{sh} j v \omega_s I'_{rv}$$

$$0 = R'_r I'_{rv} - j k j [L_{sh} I_{sv} + (L_{sh} + L'_{ro}) I'_{rv}] + j v \omega_s [L_{sh} I_{sv} + (L_{sh} + L'_{ro}) I'_{rv}]$$

$$U_{sv} = R_s I_{sv} + j v \omega_s [(L_{sh} + L_{so}) I_{sv} + L_{sh} I'_{rv}]$$

$$0 = R'_r I'_{rv} + j (v \omega_s - k j) [L_{sh} I_{sv} + (L_{sh} + L'_{ro}) I'_{rv}]$$

$$0 = \frac{R'_r}{\sigma_r} I'_{rv} + j v \omega_s [L_{sh} I_{sv} + (L_{sh} + L'_{ro}) I'_{rv}]$$

$$\text{mit } \sigma_r = \frac{v \omega_s - k j}{v \omega_s} = 1 - \frac{k(1-j)}{v}$$

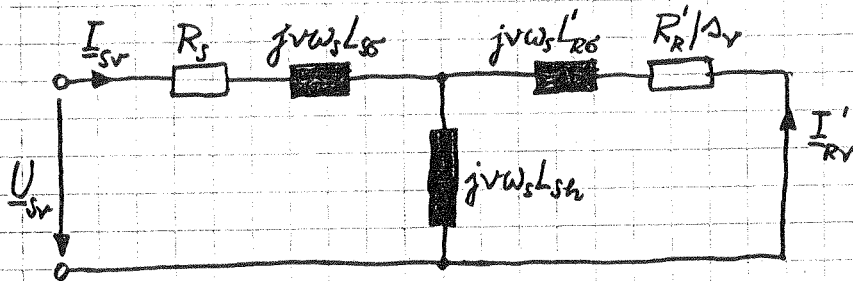
$$\sigma = 1 + \frac{v}{k} (\sigma_r - 1)$$

$$\sigma_r = 1 \rightarrow \sigma = 1$$

$$\sigma_r = 0 \rightarrow \sigma = 1 - \frac{v}{k}$$

$$\text{z.B. } \sigma_r = 0 \rightarrow \sigma = 6$$

$$\sigma_r = 0 \rightarrow \sigma = -6$$



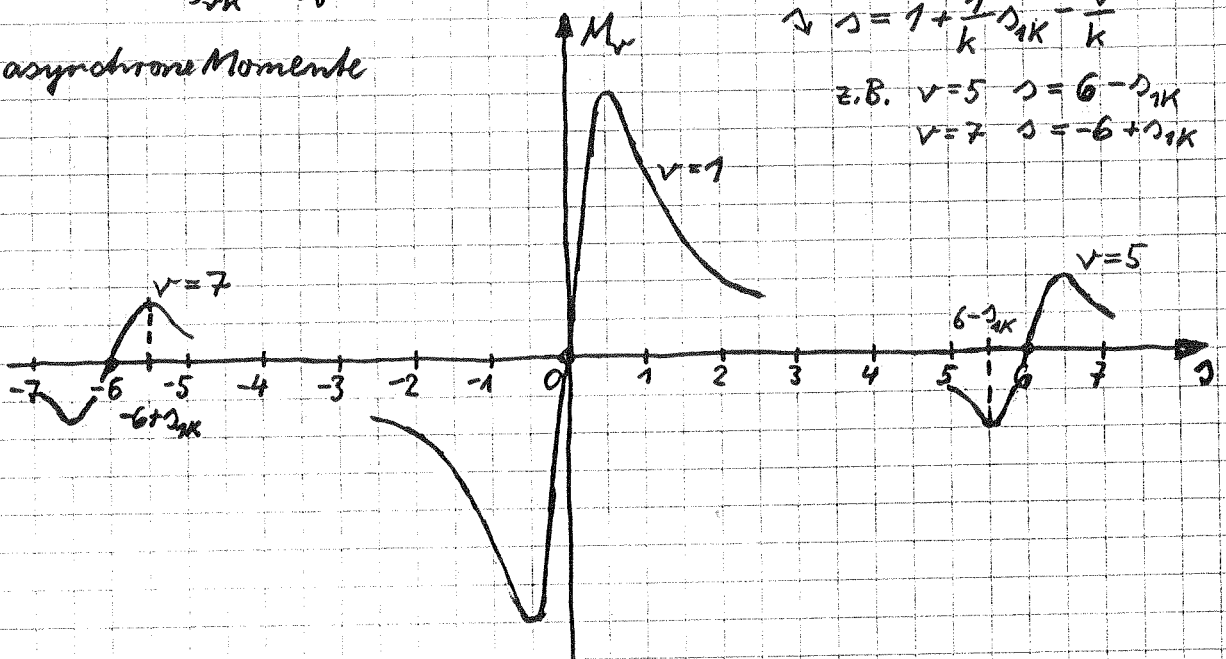
$$\frac{M_r}{M_{rk}} \approx \frac{2}{\frac{\sigma_r}{\sigma_{rk}} + \frac{\sigma_{rk}}{\sigma_r}}; \quad \frac{M_{rk}}{M_{rk}} = \left(\frac{U_{sv}}{v U_{s1}} \right)^2; \quad \frac{\sigma_{rk}}{\sigma_{rk}} = \frac{1}{v}$$

asynchrone Momente

$$\sigma = 1 + \frac{1}{k} \sigma_{rk} - \frac{v}{k}$$

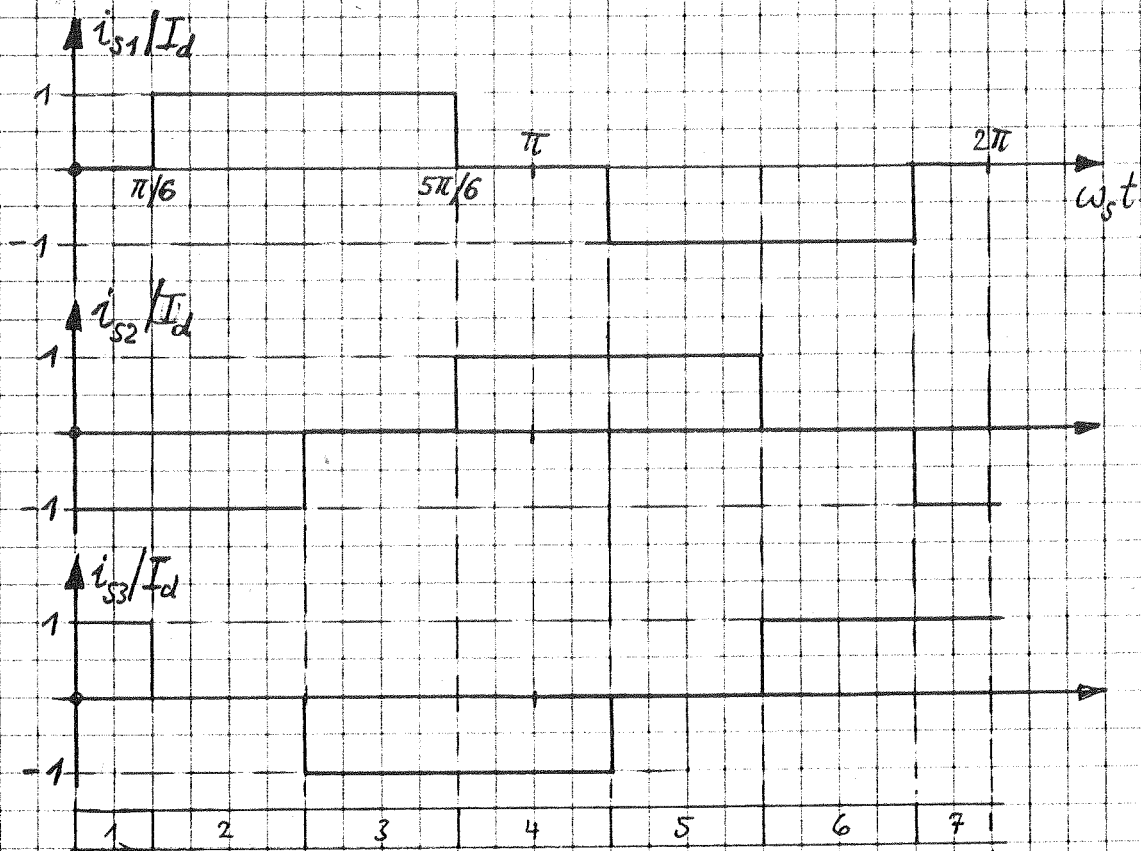
$$\text{z.B. } v=5 \rightarrow \sigma = 6 - \sigma_{rk}$$

$$v=7 \rightarrow \sigma = -6 + \sigma_{rk}$$



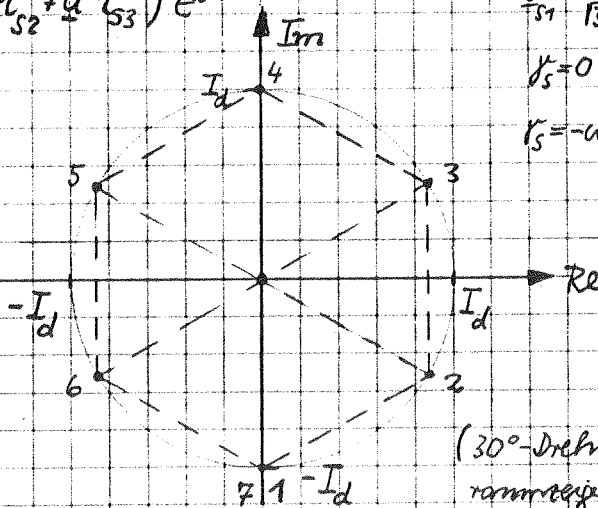
(Stromverdrängung unberücksichtigt.)

Statorstromraumzeiger bei Speisung der Asynchronmaschine mit
stromeinprägendem Umrichter:



$$\underline{i}_{s1} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\underline{i}_{s1} + \underline{a} \underline{i}_{s2} + \underline{a}^2 \underline{i}_{s3}) e^{j\gamma_s} \quad \text{z.B. } \underline{i}_{s1} = \frac{I_d}{\sqrt{3}} (0 - \underline{a} + \underline{a}^2) e^{j\gamma_s} = I_d e^{j(\gamma_s - \frac{\pi}{2})}$$

$\gamma_s = 0:$

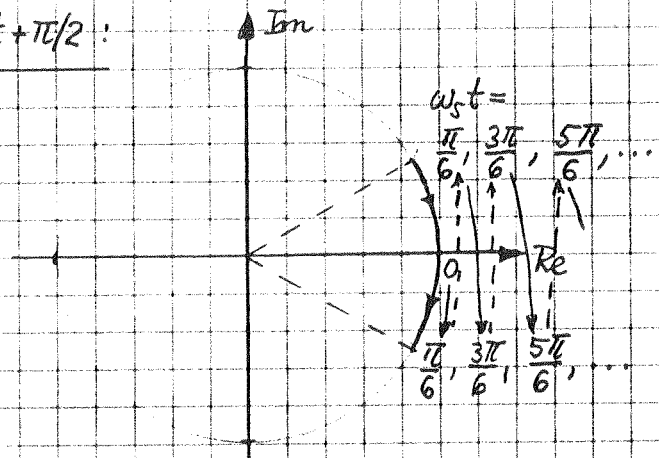


$\gamma_s = 0: \underline{i}_{s1} = I_d e^{-j\pi/2}$

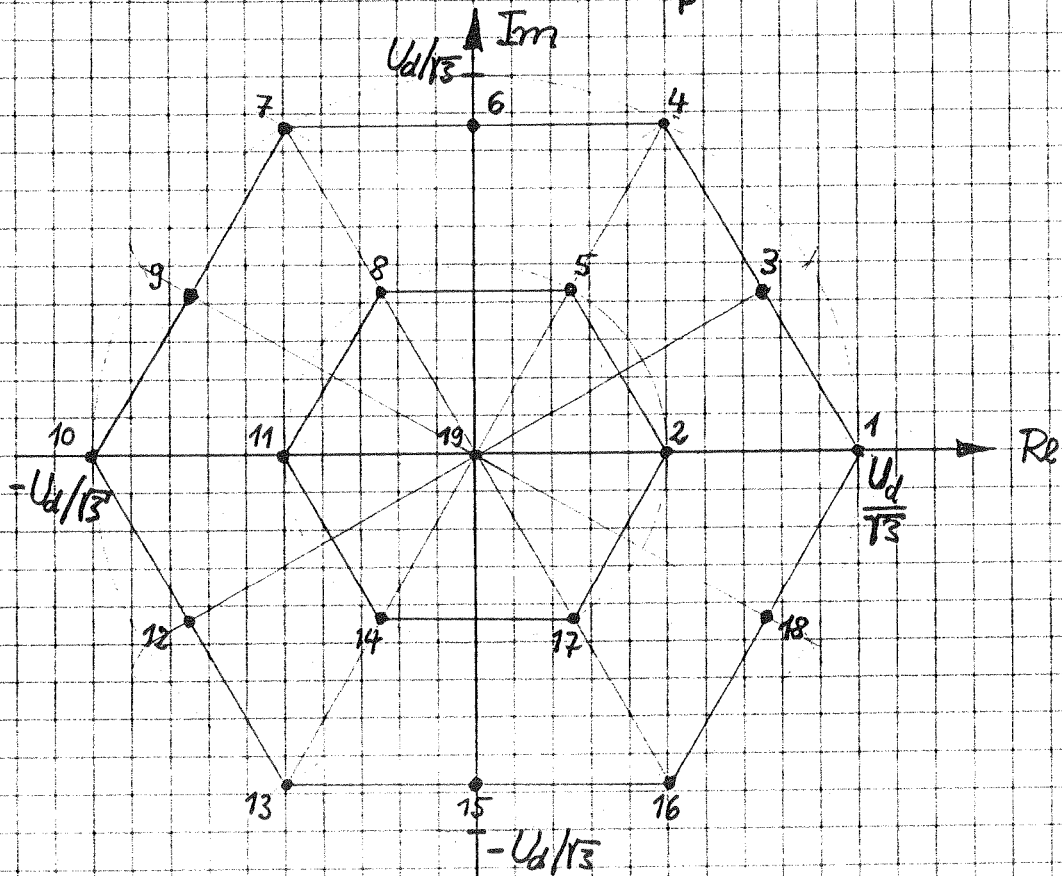
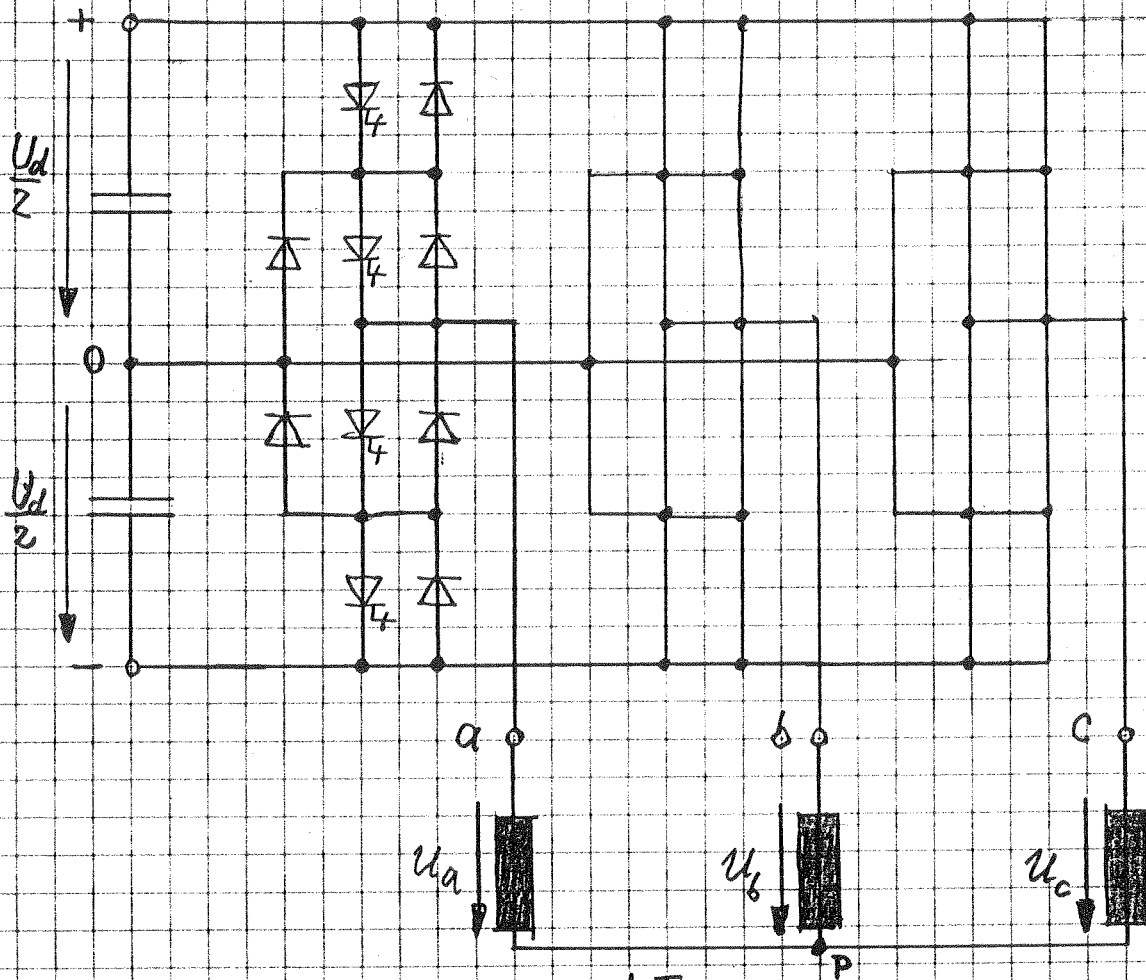
$\gamma_s = -\omega_s t + \pi/2: \underline{i}_{s1} = I_d e^{-j\omega_s t}$

(30°-Drehung gegenüber Spannungsraumzeiger nach S. 32!)

$\gamma_s = -\omega_s t + \pi/2:$



Dreipunktwechselrichter:



Raumzeiger $\underline{u_{s1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} (u_a + \underline{a} u_b + \underline{a}^2 u_c)$; $i_s = 0$

$$y_s = 0:$$

$$u_{s1} = \frac{1}{\sqrt{3}} (u_a + \alpha u_b + \alpha^2 u_c)$$

$$\begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{a0} \\ u_{b0} \\ u_{c0} \end{bmatrix}$$

u_{s1}	$\frac{u_{a0}}{U_d/2}$	$\frac{u_{b0}}{U_d/2}$	$\frac{u_{c0}}{U_d/2}$	$\frac{u_a}{U_d/6}$	$\frac{u_b}{U_d/6}$	$\frac{u_c}{U_d/6}$
①	1	-1	-1	4	-2	-2
④	1	1	-1	2	2	-4
⑦	-1	1	-1	-2	4	-2
⑩	-1	1	1	-4	2	2
⑬	-1	-1	1	-2	-2	4
⑯	1	-1	1	2	-4	2
③	1	0	-1	3	0	-3
⑥	0	1	-1	0	3	-3
⑨	-1	1	0	-3	3	0
⑫	-1	0	1	-3	0	3
⑮	0	-1	1	0	-3	3
⑱	1	-1	0	3	-3	0
②	$\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix}$	2	-1	-1
⑤	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	1	1	-2
⑧	$\begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix}$	-1	2	-1
⑪	$\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$	-2	1	1
⑭	$\begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	-1	-1	2
⑰	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$	1	-2	1
⑲	$\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$	0	0	0

z.B.: ① $y_s = 0$

$$u_{s1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{U_d}{6} (4 - 2g - 2g^2) = \frac{U_d}{\sqrt{3}}$$

z.B.: ③ $y_s = 0$

$$u_{s1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{U_d}{6} (3 + 0 - 3g^2) = \frac{U_d}{2} e^{j\pi/6}$$

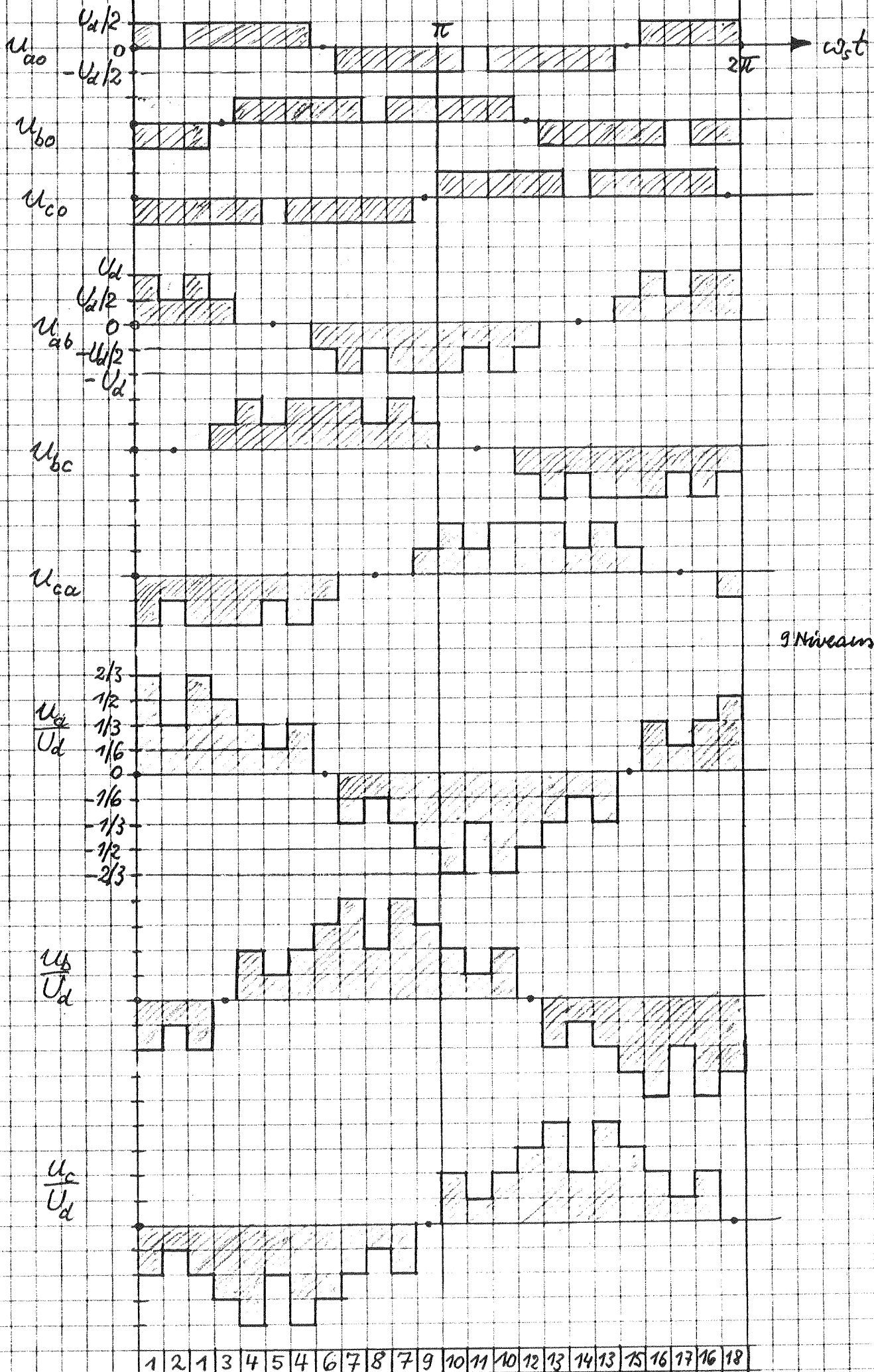
z.B.: ② $y_s = 0$

$$u_{s1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{U_d}{6} (2 - g - g^2) = \frac{U_d}{2\sqrt{3}}$$

Für u_{a0} , u_{b0} , u_{c0} können die Werte $0, \pm U_d/2$ gewählt werden; damit sind 27 Schaltzustände des Dreipunktwechselrichters möglich.

Dies entspricht 19 Varianten des Spannungsraumzeigers. Bei dessen

Weiterschalten soll möglichst immer nur ein Brückenweig umgeschaltet werden, um die Verluste klein zu halten.



9 Niveaus!

Raumveigerwechsel mit nur einer Umschaltung:

$$1 \rightarrow 3; 18; 2(0, -1, -1)$$

$$3 \rightarrow 1; 4; 2(1, 0, 0); 5(0, 0, -1)$$

$$2(1, 0, 0) \rightarrow 3; 18; 5(1, 1, 0); 17(1, 0, 1); 19(0, 0, 0)$$

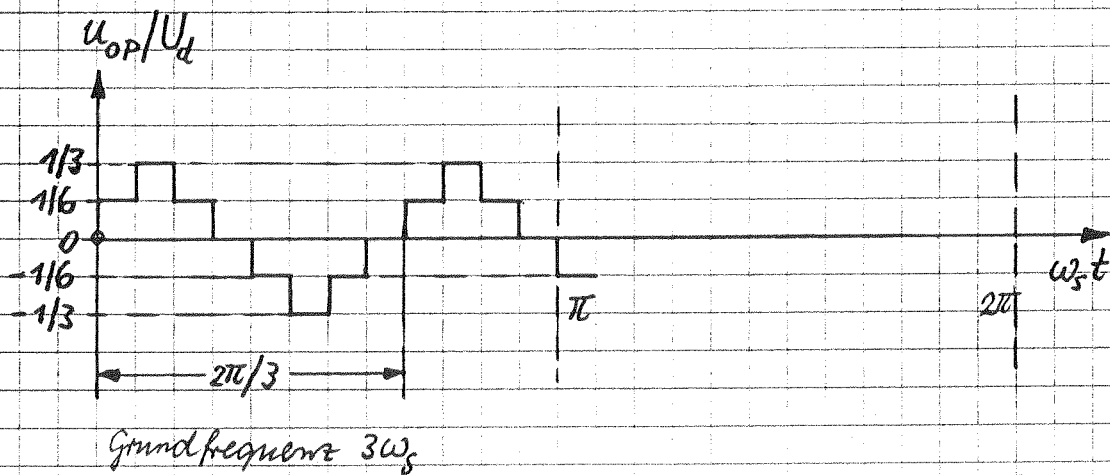
$$2(0, -1, -1) \rightarrow 1; 5(0, 0, -1); 17(0, -1, 0); 19(-1, -1, -1)$$

$$19(1, 1, 1) \rightarrow 5(1, 1, 0); 11(0, 1, 1); 17(1, 0, 1)$$

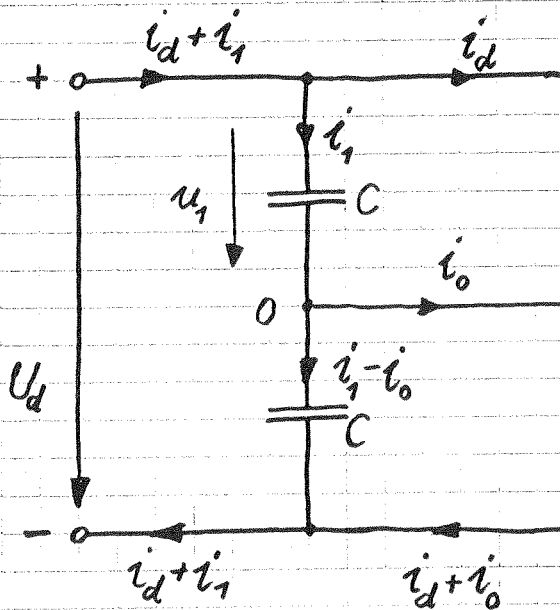
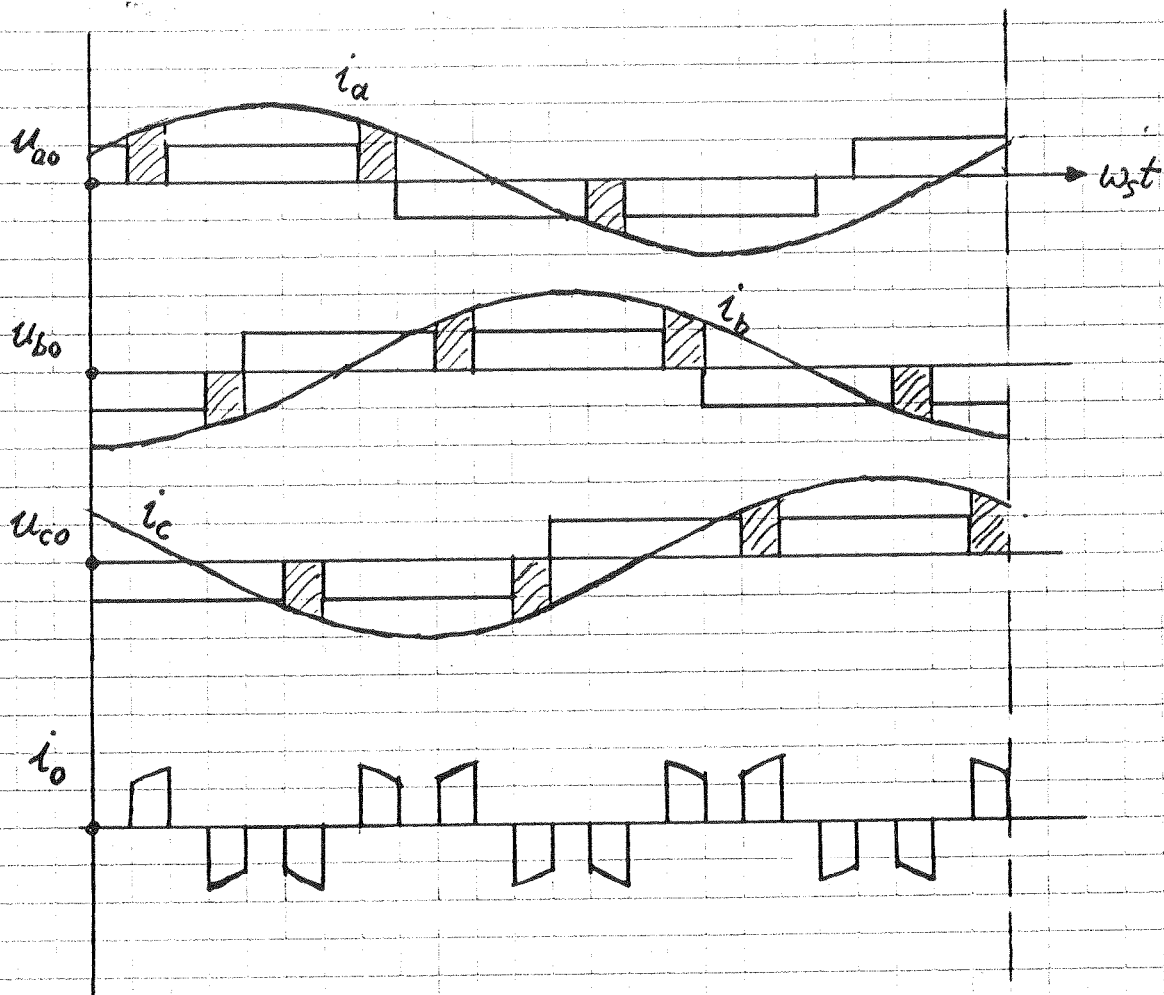
$$19(-1, -1, -1) \rightarrow 2(0, -1, -1); 8(-1, 0, -1); 14(-1, -1, 0);$$

$$19(0, 0, 0) \rightarrow 5(0, 0, -1); 11(-1, 0, 0); 17(0, -1, 0); 2(1, 0, 0);$$

$$8(0, 1, 0); 14(0, 0, 1)$$



Bestimmung des Mittelpunktsstroms für ein Beispiel:



$$U_d = \frac{1}{C} \int i_1 dt + \frac{1}{C} \int (i_1 - i_0) dt$$

$$U_d = 2u_1 - \frac{1}{C} \int i_0 dt$$

$$\frac{1}{C} \int i_0 dt \approx 0 \Rightarrow u_1 \approx \frac{1}{2} U_d$$

4. Dynamische Struktur der Drehstromasynchronmaschine

Treten keine Nullkomponenten auf, dann reduziert sich das Spannungsgleichungssystem von S. 21 auf zwei Gleichungen (Rotor kurzgeschlossen):

$$\begin{bmatrix} \underline{u}_{s1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & \\ & R'_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_{s1} \\ \underline{i}'_{r1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -j\dot{\psi}_s & \\ & -j\dot{\psi}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\psi}_{s1} \\ \underline{\psi}'_{r1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\underline{\psi}}_{s1} \\ \dot{\underline{\psi}}'_{r1} \end{bmatrix}$$

Ersetzen der Ströme durch die Flüsse:

$$\begin{bmatrix} \underline{i}_{s1} \\ \underline{i}'_{r1} \end{bmatrix} = \frac{1}{L_{ss}L'_{rr} - L_{sr}^2} \begin{bmatrix} L'_{rr} & -L_{sr} \\ -L_{sr} & L_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\psi}_{s1} \\ \underline{\psi}'_{r1} \end{bmatrix}$$

$$L_{ss} = L_{sr} + L_{ss'} \quad ; \quad L'_{rr} = L_{sr} + L'_{rr'}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{i}_{s1} \\ \underline{i}'_{r1} \end{bmatrix} = \frac{1-\tilde{\sigma}}{\tilde{\sigma}L_{sr}} \begin{bmatrix} 1+\tilde{\sigma}_r & -1 \\ -1 & 1+\tilde{\sigma}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\psi}_{s1} \\ \underline{\psi}'_{r1} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\sigma}_s = \frac{L_{ss'}}{L_{sr}} \quad ; \quad \tilde{\sigma}_r = \frac{L'_{rr'}}{L_{sr}} \quad ; \quad \tilde{\sigma} = 1 - \frac{1}{(1+\tilde{\sigma}_s)(1+\tilde{\sigma}_r)}$$

Einsetzen ergibt:

$$\begin{bmatrix} \underline{u}_{s1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+\tilde{\sigma}_s} \frac{R_s}{\tilde{\sigma}L_{sr}} - j\dot{\psi}_s & -(1-\tilde{\sigma}) \frac{R_s}{\tilde{\sigma}L_{sr}} \\ -(1-\tilde{\sigma}) \frac{R'_r}{\tilde{\sigma}L_{sr}} & \frac{1}{1+\tilde{\sigma}_r} \frac{R'_r}{\tilde{\sigma}L_{sr}} - j\dot{\psi}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\psi}_{s1} \\ \underline{\psi}'_{r1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\underline{\psi}}_{s1} \\ \dot{\underline{\psi}}'_{r1} \end{bmatrix}$$

Ersetzt man in der Beziehung für das innere Drehmoment S. 20 die Ströme durch die Flüsse, dann folgt:

$$M_{in} = 2p \frac{1-\tilde{\sigma}}{\tilde{\sigma}L_{sr}} \operatorname{Im} \{ \underline{\psi}_{s1} \underline{\psi}'_{r1}^* \}$$

Auf S. 42 sind die komplexen Spannungsgleichungen zusammen mit der mechanischen Gleichung (S. 14 oben) als Strukturdiagramm dargestellt. Es wurde angenommen, daß die Statorspannungen (bei verschwindendem Nullsystem) und das Lastmoment als Eingangsgrößen gegeben sind. Ferner wurde angenommen, daß zur Festlegung der Bezugachse γ_s und damit auch $\dot{\gamma}_s$ vorgegeben werden. Die verwendeten Abkürzungen sind:

$$\mu_s = \frac{R_s}{(1-\sigma_s)\sigma L_{sh}} \quad ; \quad \mu_R = \frac{R'_R}{(1-\sigma_R)\sigma L_{sh}}$$

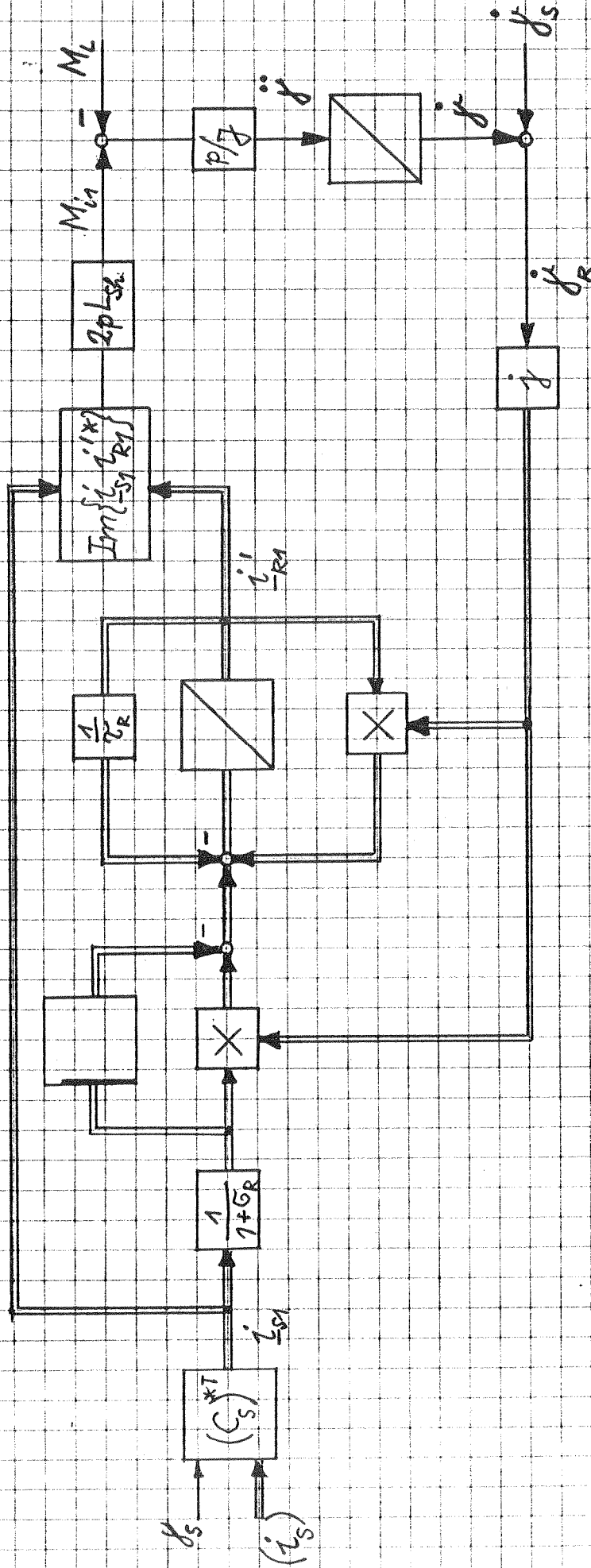
$$\rho_s = \frac{(1-\sigma) R_s}{\sigma L_{sh}} \quad ; \quad \rho_R = \frac{(1-\sigma) R'_R}{\sigma L_{sh}}$$

$$K = 2p \frac{1-\sigma}{\sigma L_{sh}}$$

Es handelt sich um ein nichtlineares System 5. Ordnung, das ins Reelle übertragen 5 Integratoren enthält.

Die Struktur der stromgespeisten Drehstromasynchronmaschine benötigt die Statorspannungsgleichung nicht und führt zu einem nichtlinearen System 3. Ordnung (siehe S. 43!).

Drehstromasynchronmaschine stromgespeist:



$$0 = R_R' i_{R1}' - j \dot{i}_R' (L_{sk} i_{sy} + L_{RR}' i_{R1}') + (L_{sk} i_{sy} + L_{RR}' i_{R1}') + (L_{sk} i_{sy} + L_{RR}' i_{R1}') \\ i_{R1}' + \left(\frac{1}{r_R} - j \dot{i}_R' \right) i_{R1}' = \frac{1}{1+G_R} [j \dot{i}_R' i_{sy} - i_{sy}]$$

$$r_R = \frac{L_{RR}'}{R_R'}$$

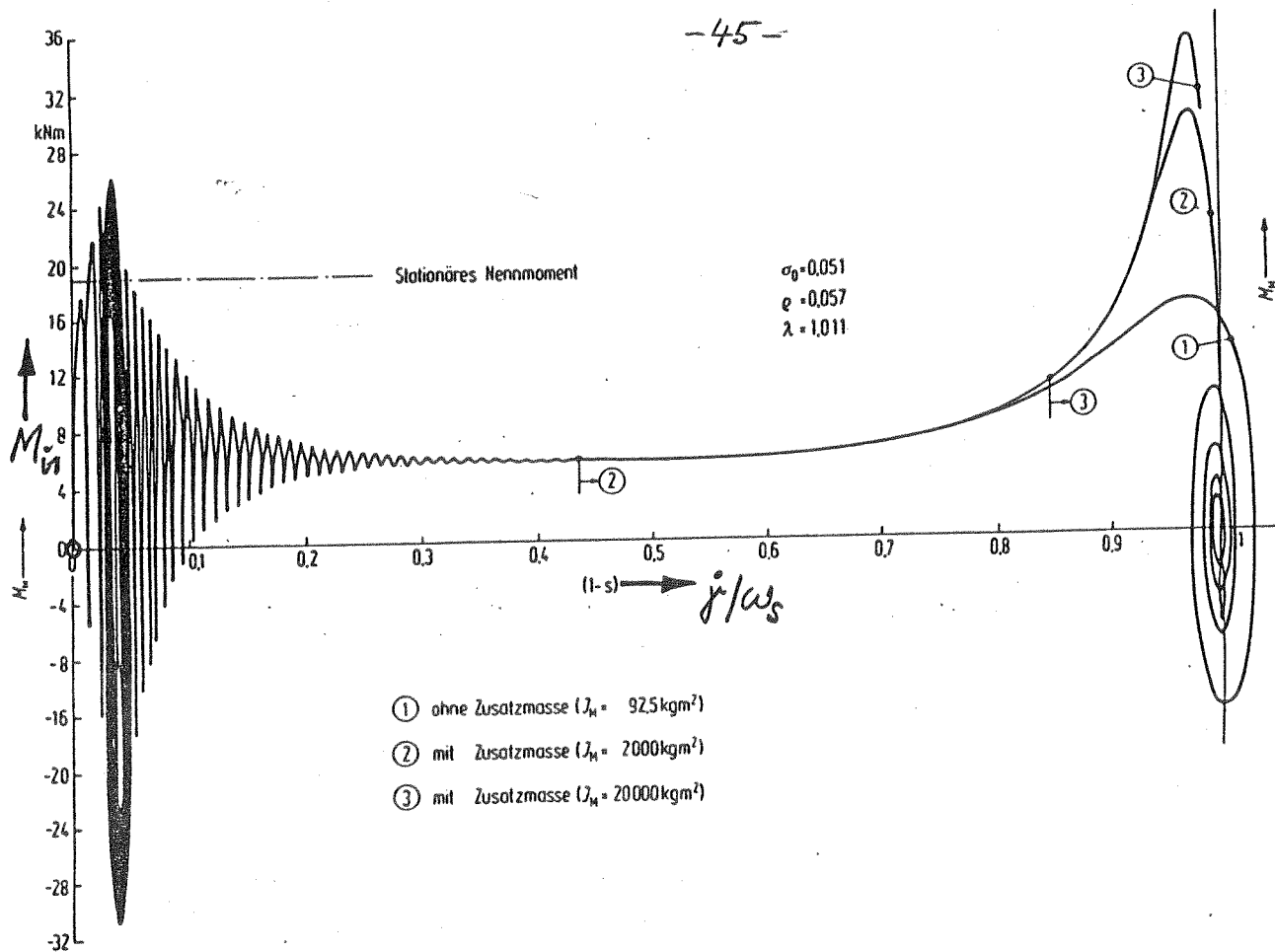
Die folgenden Bilder zeigen Simulationsergebnisse für den Hochlauf am starren Netz.

a) Figur 2 u. 3: eines Motors mit Stromverdrängungsläufer

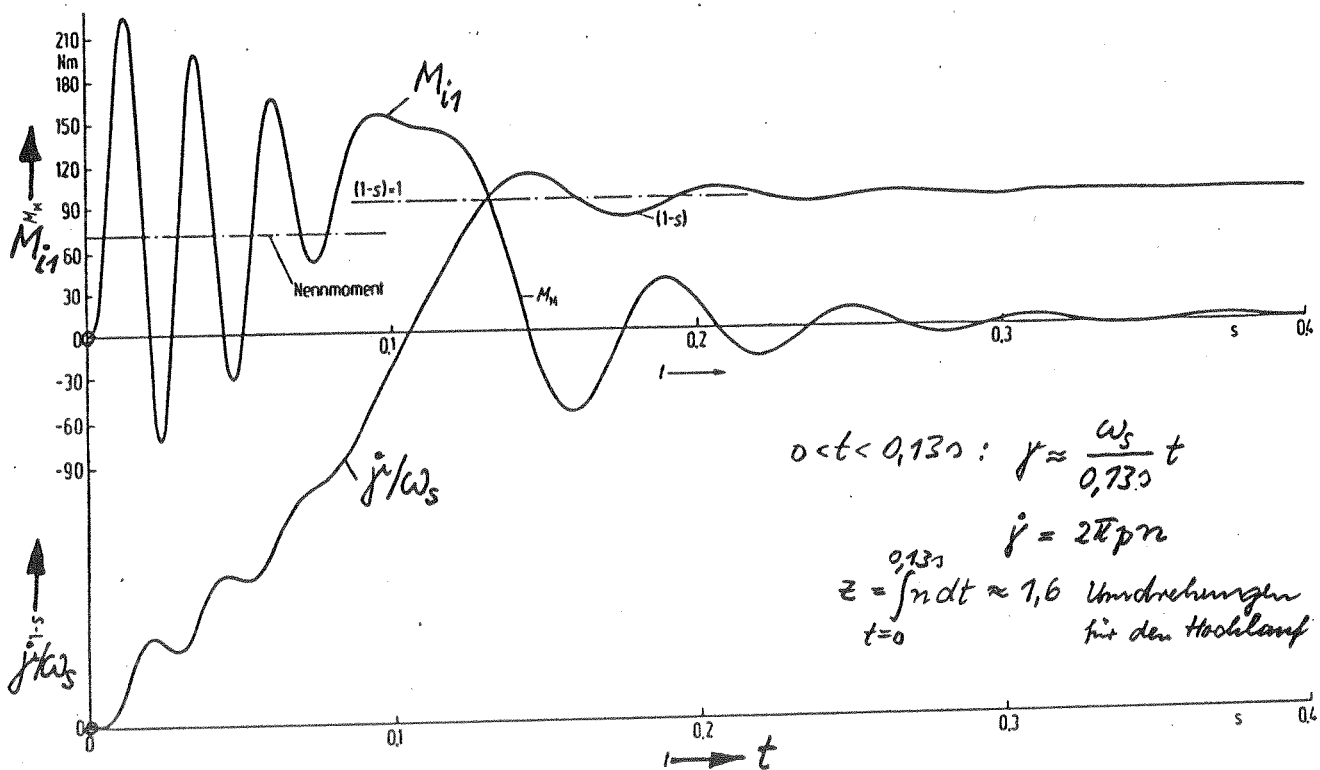
b) Figur 4 u. 5: eines sog. Normmotors (mit Kurzschlussläufer)

zu a): Je größer die Zusatzmasse (Schwungrad) um so mehr nähert sich das Zustandsdiagramm $M_i(j)$ der stationären Kennlinie. Typisch ist der Einschwingvorgang des Drehmoments beim Start und das Überspringen der Drehzahl beim Einfahren in den Synchronismus (Fall ①). Das dynamische Kippmoment ist wesentlich kleiner als das stationäre.

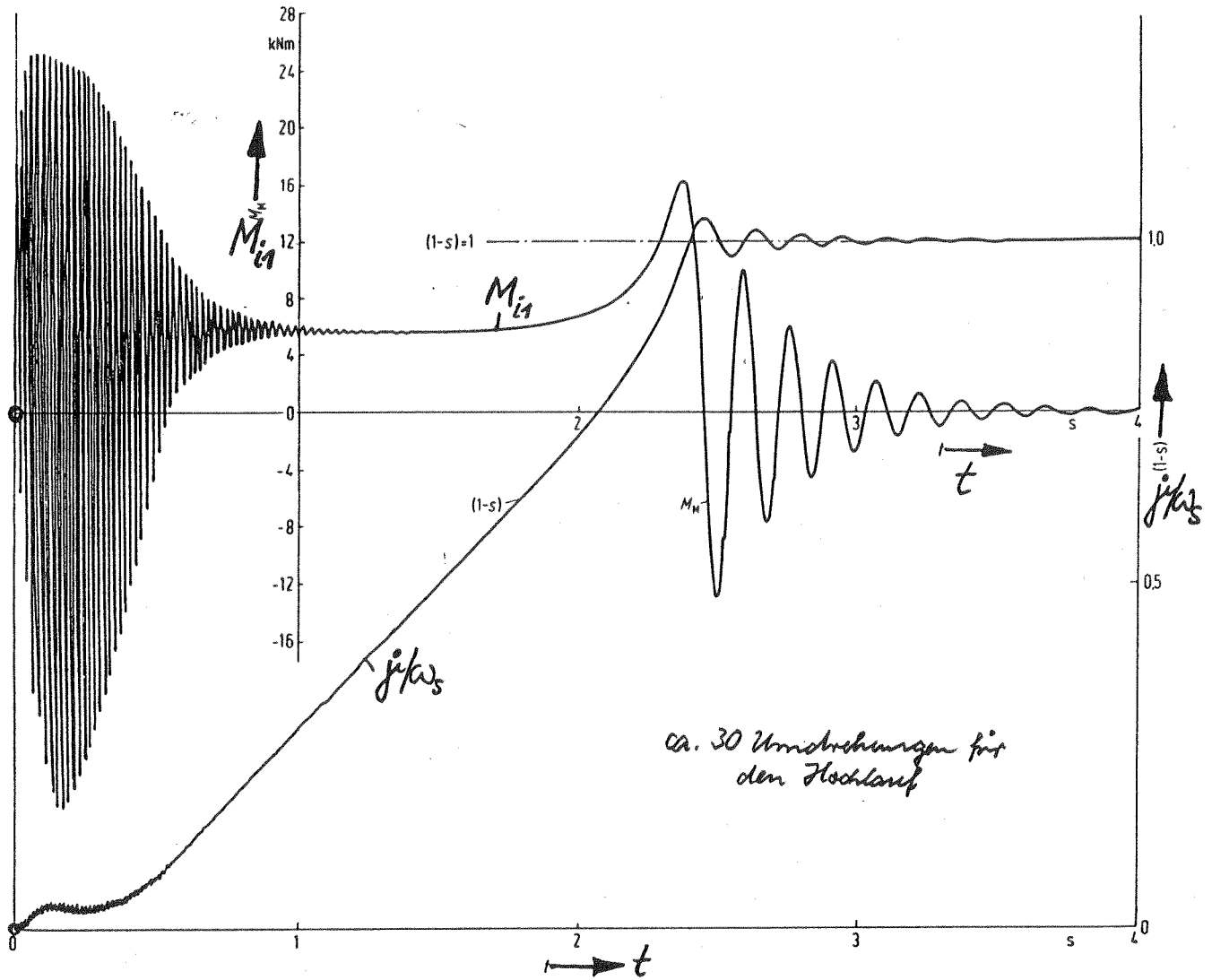
zu b): Die Hochlaufzeit des kleinen Normmotors ist kleiner als $1/10$ der Hochlaufzeit des großen Motors mit Stromverdrängungsläufer.



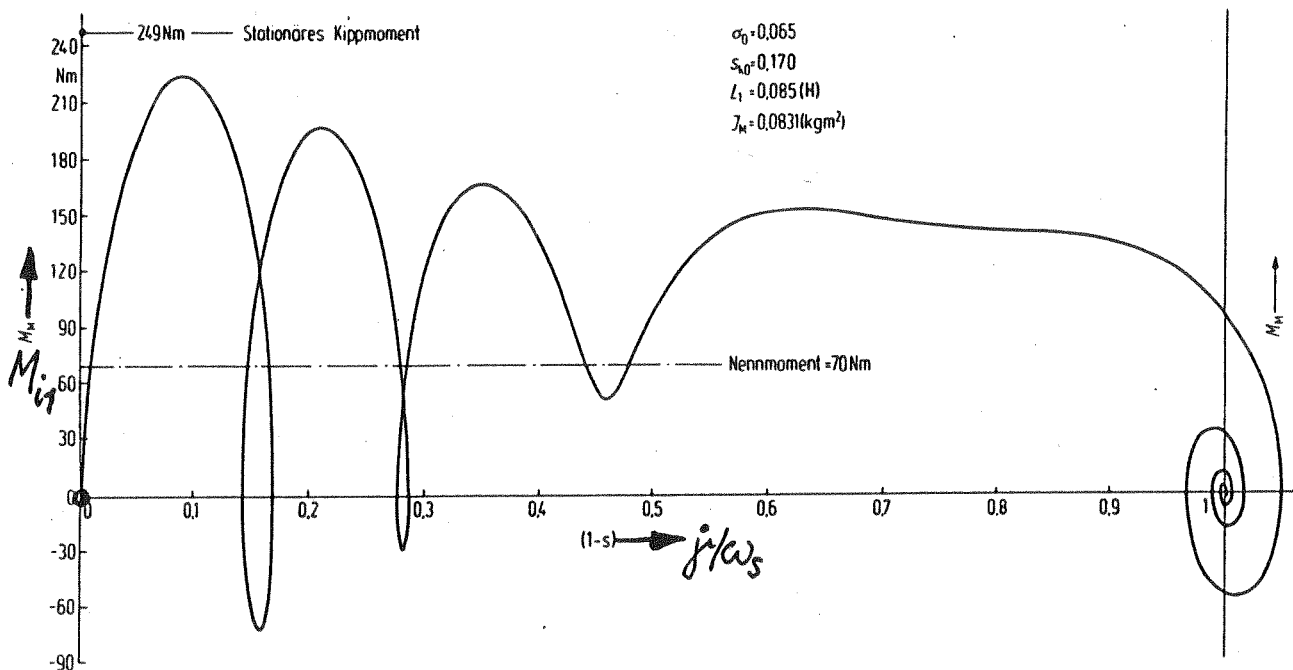
Zum Einfluß des Massenträgheitsmomentes auf die Drehzahl/Drehmoment-Kennlinie eines Induktionsmotors mit Stromverdrängungsläufer ($P_n = 3000 \text{ kW}$; $2p = 4$) (äquivalenter Doppelkäfigmotor)



Zeitverlauf von Drehzahl und Drehmoment beim Leerhochlauf eines Normmotors ($P_n = 11 \text{ kW}$; $2p = 4$)



Zeitverlauf von Drehmoment und Drehzahl beim Leeranlauf eines Induktionsmotors mit Stromverdrängungsläufer ($P_n = 3000 \text{ kW}$; $2p = 4$) Fall ①



Drehzahl/Drehmoment-Kennlinie beim Leerhochlauf eines Normmotors ($P_n = 11 \text{ kW}$; $2p = 4$ $J_m = 0,0831 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$)

Vereinfachte Betrachtung der Dynamik der Asynchronmaschine

(nach Ansatz von Pfaff ETZ-A 83(1962), S. 388):

Aus dem Gleichungssystem von S. 21 folgt bei verschwindenden Nullkomponenten und Speisung mit einem sinusförmigen symmetrischen Drehspannungssystem nach S. 19 unten, wenn mit $\gamma_s = 0$, $\gamma_R = \gamma$ ein statorfestes Bezugssystem gewählt wird:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} U e^{j\omega t} = R_s \underline{i}_{s1} + \frac{d}{dt} [(L_{sR} + L_{s\sigma}) \underline{i}_{s1} + L_{sR-R1} \underline{i}'_{R1}] ,$$

$$0 = R'_R \underline{i}'_{R1} - j\dot{\gamma} [L_{sR} \underline{i}_{s1} + (L_{sR} + L'_{R\sigma}) \underline{i}'_{R1}] + \frac{d}{dt} [L_{sR} \underline{i}_{s1} + (L_{sR} + L'_{R\sigma}) \underline{i}'_{R1}] ,$$

$$2p L_{sR} \text{Im} \{ \underline{i}_{s1} \underline{i}'_{R1*} \} = \frac{T}{p} \ddot{\gamma} + M_L .$$

Mit dem dem Statorfluß entsprechenden Magnetisierungsstrom

$$\underline{i}''_{\mu} = \underline{i}_{s1} + \frac{L_{sR}}{L_{sR} + L_{s\sigma}} \underline{i}'_{R1} ; \quad \underline{\psi}_{s1} = (L_{sR} + L_{s\sigma}) \underline{i}''_{\mu}$$

lautet die Statorspannungsgleichung

$$\frac{\sqrt{3}}{2} U e^{j\omega t} = R_s \underline{i}_{s1} + L_{ss} \underline{i}''_{\mu}$$

die Rotorspannungsgleichung

$$0 = R'_R \underline{i}'_{R1} - j\dot{\gamma} L_{sR} \underline{i}''_{\mu} - j\dot{\gamma} \sigma L'_{RR} \underline{i}'_{R1} + L_{sR} \underline{i}''_{\mu} + \sigma L'_{RR} \underline{i}'_{R1}$$

$$0 = (R'_R - j\dot{\gamma} \sigma L'_{RR}) \underline{i}'_{R1} - j\dot{\gamma} L_{sR} \underline{i}''_{\mu} + L_{sR} \underline{i}''_{\mu} + \sigma L'_{RR} \underline{i}'_{R1}$$

und die Momentenbilanz

$$2p L_{sR} \text{Im} \{ \underline{i}''_{\mu} \underline{i}'_{R1*} \} = \frac{T}{p} \ddot{\gamma} + M_L .$$

Die stationäre Lösung der Statorspannungsgleichung, für $R_s \approx 0$,

$$\underline{i}''_{\mu} = -j \frac{1}{\omega L_{ss}} \frac{\sqrt{3}}{2} U e^{j\omega t} ,$$

-48-

ist dann alleine gültig, wenn der elektromagnetische Übergangsvorgang abgeklungen ist (maßgebende Zeitkonstante $\tau_s = L_{ss}/R_s$). Da dieser Übergangsvorgang normalerweise vor dem eigentlichen Beginn des mechanischen Übergangsvorgangs abgelaufen ist, wird mit obiger Lösung für $\underline{i}_\mu''$ weitergerechnet. Mit der Ableitung $I_\mu = U_s / \omega_s L_{ss}$, dem Ansatz

$$\underline{i}_{R1}' = \underline{I}_R'(t) \frac{\sqrt{3}}{2} e^{j\omega_s t}$$

und dem Schlupf $s = (\omega_s - j') / \omega_s$ folgt dann für die Rotorspannungsgleichung

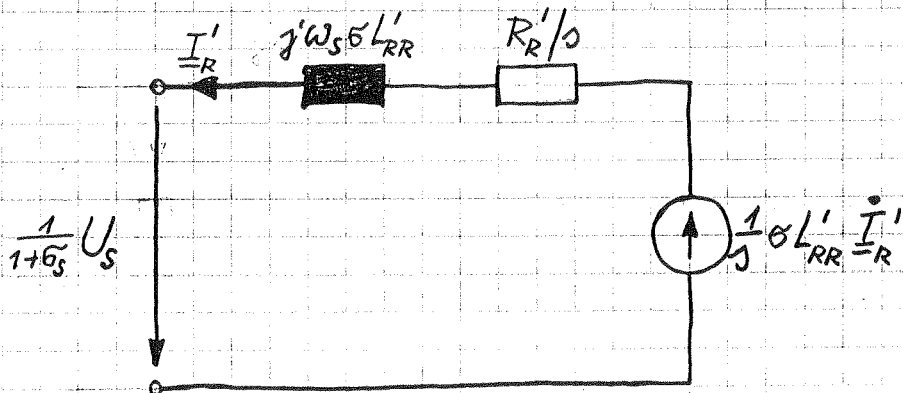
$$0 = [R_R' - j(1-s)\omega_s \sigma L_{RR}'] \underline{I}_R' - (1-s)\omega_s L_{sh} I_\mu + \omega_s L_{sh} I_\mu + \sigma L_{RR}' [j\omega_s \underline{I}_R' + \dot{\underline{I}}_R']$$

$$0 = [R_R' + j s \omega_s \sigma L_{RR}'] \underline{I}_R' + \sigma L_{RR}' \dot{\underline{I}}_R' + s \omega_s L_{sh} I_\mu$$

und die Momentenbilanz

$$3 p L_{sh} I_\mu \cdot \text{Im}\{-j \underline{I}_R'^*\} = \frac{7}{p} j' + M_L$$

$\underline{I}_R'(t)$ geht für den stationären Fall ($s = \text{const}$) in den konstanten Zeiger über. Aus der Rotorspannungsgleichung resultiert folgendes „dynamisches Ersatzschaltbild“:



Umstellung auf bezogene Größen (per unit):

$$0 = \left[\frac{R'_R I_{SN}}{U_{SN}} + j \sigma \frac{\omega_s L'_{RR} I_{SN}}{U_{SN}} \right] \frac{I'_R}{I_{SN}} + \sigma \frac{\omega_s L'_{RR} I_{SN}}{U_{SN}} \frac{d(I'_R / I_{SN})}{d(\omega_s t)} +$$

$$+ \frac{\omega_s L_{sh} I_{SN}}{U_{SN}} \frac{I_\mu}{I_{SN}},$$

$$\frac{3 p^2 U_{SN} I_{SN}}{\omega_s^3 J} \frac{\omega_s L_{sh} I_{SN}}{U_{SN}} \frac{I_\mu}{I_{SN}} \operatorname{Im} \left\{ -j \frac{I'_R}{I_{SN}} \right\} = -\frac{J \omega_s^2 ds}{p d(\omega_s t)} \frac{1}{\omega_s^2 J / p} + \frac{M_L}{\omega_s^2 J / p}.$$

Mit Abkürzungen geschrieben:

$$0 = (\tau + j \sigma X_{RR}) \underline{i}'_R + \sigma X_{RR} \frac{d \underline{i}'_R}{d\tau} + \sigma X_{sh} i_\mu,$$

$$\frac{1}{\tau_m} X_{sh} i_\mu \operatorname{Im} \left\{ -j \underline{i}'_R \right\} = -\frac{ds}{d\tau} + m_L.$$

Aufspalten in Real- und Imaginärteil mit

$$\underline{i}'_R = i_{R\alpha} + j i_{R\beta}$$

ergibt:

$$0 = \tau i_{R\alpha} - \sigma X_{RR} i_{R\beta} + \sigma X_{RR} \frac{d i_{R\alpha}}{d\tau} + \sigma X_{sh} i_\mu,$$

$$0 = \tau i_{R\beta} + \sigma X_{RR} i_{R\alpha} + \sigma X_{RR} \frac{d i_{R\beta}}{d\tau},$$

$$\frac{X_{sh} i_\mu}{\tau_m} i_{R\alpha} = \frac{ds}{d\tau} - m_L.$$

Einführen einer neuen Maschinengröße (Kippschlupf)

$$\frac{\tau}{\sigma X_{RR}} = \sigma_K$$

führt zu folgender Schreibweise:

$$0 = \frac{i_{R\alpha}}{X_{sh} i_{\mu} / \sigma X_{RR}} - \frac{s}{s_K} \frac{i_{R\beta}}{X_{sh} i_{\mu} / \sigma X_{RR}} + \frac{d}{d(s_K \tau)} \left\{ \frac{i_{R\alpha}}{X_{sh} i_{\mu} / \sigma X_{RR}} \right\} + \frac{s}{s_K}$$

$$0 = \frac{i_{R\beta}}{X_{sh} i_{\mu} / \sigma X_{RR}} + \frac{s}{s_K} \frac{i_{R\alpha}}{X_{sh} i_{\mu} / \sigma X_{RR}} + \frac{d}{d(s_K \tau)} \left\{ \frac{i_{R\beta}}{X_{sh} i_{\mu} / \sigma X_{RR}} \right\}$$

$$\frac{i_{R\alpha}}{X_{sh} i_{\mu} / \sigma X_{RR}} = \frac{\tau_m r s_K}{(X_{sh} i_{\mu})^2} \frac{d(s/s_K)}{d(s_K \tau)} - \frac{m_L}{(X_{sh} i_{\mu})^2 / (\sigma X_{RR} \tau_m)}$$

Mit Abkürzungen geschrieben:

$$\left| \begin{array}{l} 0 = i'_{R\alpha} - s' i'_{R\beta} + \frac{d i'_{R\alpha}}{d \tau'} + s' \\ 0 = i'_{R\beta} + s' i'_{R\alpha} + \frac{d i'_{R\beta}}{d \tau'} \\ i'_{R\alpha} = P \cdot \frac{d s'}{d \tau'} - m'_L \end{array} \right.$$

$$\text{mit } P = \frac{\tau_m r s_K}{(X_{sh} i_{\mu})^2}$$

Dieses nichtlineare Differentialgleichungssystem beschreibt das Verhalten der zum Zeitpunkt $t=0$ ans strome Netz geschalteten Drehstromasynchronmaschine näherungsweise. Eingangsgrößen sind das bezogene Lastmoment und der Anfangswert des bezogenen Schlupfs. Das Gleichungssystem enthält einen einzigen Maschinenparameter:

$$P = \frac{\omega_s^3}{p^2 S_N} \left(\frac{R'_R I_{SN}}{U_{SN}} \right)^2 \frac{U_{SN}}{\sigma X'_{RR} I_{SN}} \left[\frac{(1+\tilde{\sigma}_s) U_{SN}}{U_s} \right]^2$$

P liegt zwischen 0,2 (kleine Maschinen) und 2 (große Maschinen).

Bezugsgrößen (Index B):

$$i'_{R\alpha/\beta} = \frac{I'_{R\alpha/\beta}}{I_B}, \quad I_B = \frac{U_{SN}}{\sigma X'_{RR} I_{SN}} \frac{U_s / (1+\tilde{\sigma}_s)}{U_{SN}} I_{SN}$$

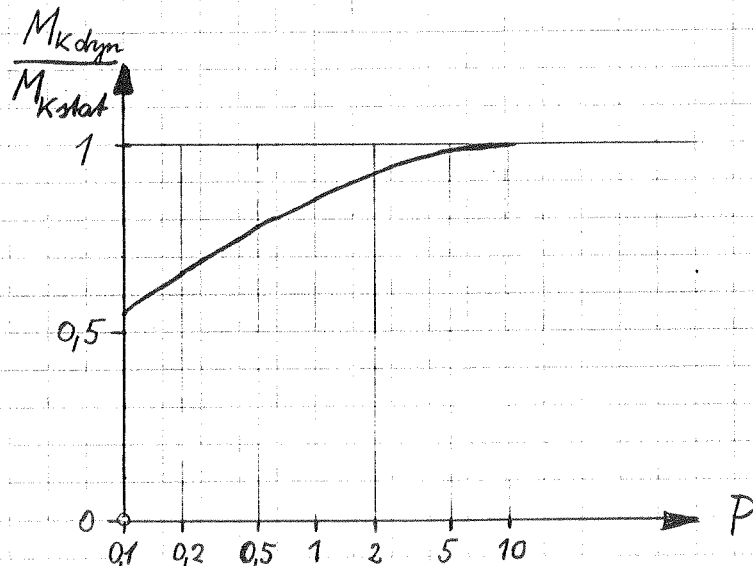
$$j' = \frac{j}{j_B}, \quad j_B = j_K = \frac{R_R'}{G X_{RR}'}$$

$$\tau' = \frac{t}{t_B}, \quad t_B = \frac{G L_{RR}'}{R_R'}$$

$$m_L' = \frac{M_L}{M_B}, \quad M_B = \frac{P}{\omega_S} S_N \left[\frac{U_S / (1 + G_S)}{U_{SN}} \right]^2 \frac{U_{SN}}{G X_{RR}' I_{SN}}$$

$$S_N = 3 U_{SN} I_{SN}$$

Beispiele ergaben, daß z.B. beim Leerhochlauf die mit dem Auftreten von Pendelmomenten verbundenen Ausgleichsvorgänge (vergl. S. 45, 46!), die den eigentlichen Hochlauf kaum beeinflussen, hier entfallen. Der weitere Verlauf wird richtig wiedergegeben. Es zeigt sich, daß für $P < 2,5$ die Drehzahl über die synchrone hinaus-schwingt. Das Verhältnis des beim Leerhochlauf auftretenden Maximalmoments, des dynamischen Kippmoments, zum stationären Kippmoment ist stets < 1 und nähert sich für große Werte von P dem Wert 1. P kann man z.B. durch Vergrößern von j (Erzatschwingungsmasse nach Bild S. 45!) erhöhen.



5. Stationärer Betrieb der Asynchronmaschine am unsymmetrischen Netz:

Belastig. unsymmetrisches sinusförmiges Drehspannungssystem

$$u_{si} = \sqrt{2} U_{si} \cos(\omega_s t + \alpha_{si}) = \frac{1}{2} \sqrt{2} [\underline{U}_{si} e^{j\omega_s t} + \underline{U}_{si}^* e^{-j\omega_s t}]$$

$$\underline{U}_{si} = U_{si} e^{j\alpha_{si}} \quad ; \quad i = 1, 2, 3.$$

Berechnung von Raumzeiger und Nullkomponente nach S. 19 ergibt:

$$\underline{u}_{s1} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{3} (\underline{U}_{s1} + a \underline{U}_{s2} + a^2 \underline{U}_{s3}) e^{j(\omega_s t + \gamma_s)} + \frac{1}{3} (\underline{U}_{s1} + a^2 \underline{U}_{s2} + a \underline{U}_{s3})^* e^{-j(\omega_s t + \gamma_s)} \right]$$

$$\underline{u}_{s1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\underline{U}_{sm} e^{j(\omega_s t + \gamma_s)} + \underline{U}_{sg} e^{-j(\omega_s t + \gamma_s)} \right]$$

$$u_{s0} = \sqrt{6} \operatorname{Re} \{ \underline{U}_{s0} e^{j\omega_s t} \}$$

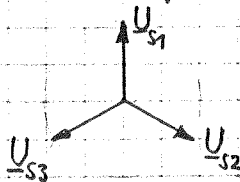
mit den sog. symmetrischen Komponenten:

$$\begin{matrix} \underline{U}_{sm} \\ \underline{U}_{sg} \\ \underline{U}_{s0} \end{matrix} = \frac{1}{3} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}^{\sqrt{3}(X)^{*T}} \begin{matrix} \underline{U}_{s1} \\ \underline{U}_{s2} \\ \underline{U}_{s3} \end{matrix}$$

m, Mitsystem
g, Gegensystem
o, Nullsystem

Jedes unsymmetrische Drehspannungssystem kann man in drei symmetrische Systeme, Mitsystem, Gegensystem und Nullsystem, zerlegen:

reines Mitsystem:



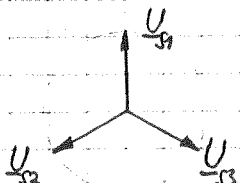
$$\underline{U}_{s2} = a^2 \underline{U}_{s1} \quad , \quad \underline{U}_{s3} = a \underline{U}_{s1} \quad \curvearrowright$$

$$\underline{U}_{sm} = \underline{U}_{s1} \quad , \quad \underline{U}_{sg} = 0 \quad , \quad \underline{U}_{s0} = 0$$

$$U_{si} = U_s$$

$$\alpha_{s1} = \alpha_0 \quad , \quad \alpha_{s2} = \alpha_0 - \frac{2\pi}{3} \quad , \quad \alpha_{s3} = \alpha_0 - \frac{4\pi}{3}$$

reines Gegensystem:



$$\underline{U}_{s2} = a \underline{U}_{s1} \quad , \quad \underline{U}_{s3} = a^2 \underline{U}_{s1} \quad \curvearrowright$$

$$\underline{U}_{sm} = 0 \quad , \quad \underline{U}_{sg} = \underline{U}_{s1} \quad , \quad \underline{U}_{s0} = 0$$

$$U_{si} = U_s$$

$$\alpha_{s1} = \alpha_0 \quad , \quad \alpha_{s2} = \alpha_0 + \frac{2\pi}{3} \quad , \quad \alpha_{s3} = \alpha_0 + \frac{4\pi}{3}$$

reines Nullsystem:

$$\underline{U}_{s1} = \underline{U}_{s2} = \underline{U}_{s3}$$

$$\underline{U}_{s1} = \underline{U}_{s2} = \underline{U}_{s3} \rightarrow$$

$$\underline{U}_{sm} = 0, \quad \underline{U}_{sg} = 0, \quad \underline{U}_{s0} = \underline{U}_{s1}$$

$$\underline{U}_{si} = \underline{U}_s$$

$$\alpha_{s1} = \alpha_0 = \alpha_{s2} = \alpha_{s3}$$

Inversion:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{s1} \\ \underline{U}_{s2} \\ \underline{U}_{s3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_{sm} \\ \underline{U}_{sg} \\ \underline{U}_{s0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \underline{a}^2 \\ \underline{a} \end{bmatrix} \underline{U}_{sm} + \begin{bmatrix} 1 \\ \underline{a} \\ \underline{a}^2 \end{bmatrix} \underline{U}_{sg} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \underline{U}_{s0}$$

Das Bezugssystem wird so gewählt, daß der vom Mitsystem bestimmte Anteil des Raumvektors konstant wird:

$$\dot{\gamma}_s = -\omega_s t + \gamma_{s0}$$

$$\dot{\gamma}_R = -\omega_s t + \gamma + \gamma_{s0}$$

$$\dot{\gamma}_s = -\omega_s$$

$$\dot{\gamma}_R = -(\omega_s - \dot{\gamma}) = -s\omega_s$$

$$\dot{\gamma} = \text{const}$$

$$\underline{u}_{s1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\underline{U}_{sm} e^{j\gamma_{s0}} + \underline{U}_{sg}^* e^{-j(2\omega_s t - \gamma_{s0})} \right]$$

Die beiden Anteile von $\underline{u}_{s1}$ läßt man getrennt auf das lineare System von S.40 einwirken (Superpositionsprinzip):

a) Anteil des Mitsystems führt mit den Ansätzen

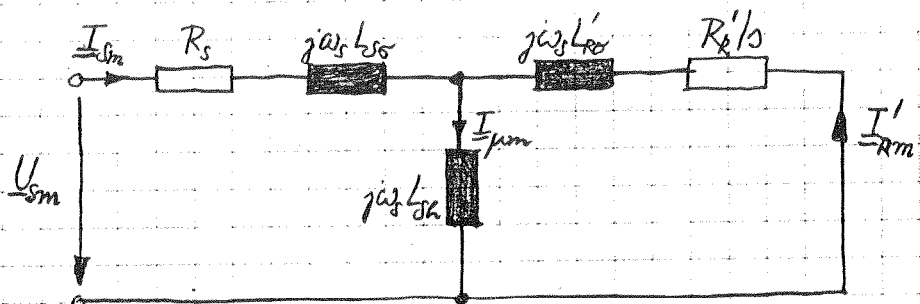
$$\underline{i}_{s1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{I}_{sm} e^{j\gamma_{s0}}, \quad \underline{i}'_{R1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{I}'_{Rm} e^{j\gamma_{s0}}$$

zu folgenden stationären Gleichungen

$$\underline{U}_{sm} = (R_s + j\omega_s L_{ss}) \underline{I}_{sm} + j\omega_s L_{sa} \underline{I}_{\mu m}$$

$$0 = \left(\frac{1}{j} R'_R + j\omega_s L'_{R0} \right) \underline{I}'_{Rm} + j\omega_s L_{sa} \underline{I}_{\mu m}$$

$$\underline{I}_{\mu m} = \underline{I}_{sm} + \underline{I}'_{Rm}$$



b) Anteil des Gegensystems führt mit den Ansätzen

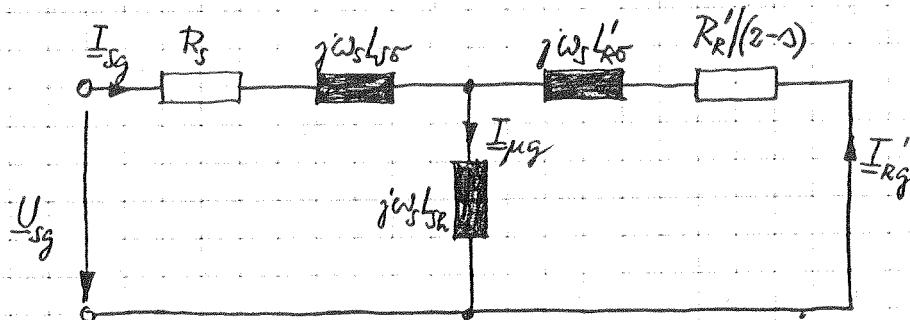
$$\underline{i}_{s1}' = \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{I}_{sg}^* e^{-j(2\omega_s t - \varphi_{s0})}, \quad \underline{i}_{R1}' = \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{I}_{Rg}^{1*} e^{-j(2\omega_s t - \varphi_{s0})}$$

zu folgenden stationären Gleichungen:

$$\underline{U}_{sg} = (R_s + j\omega_s L_{s\sigma}) \underline{I}_{sg} + j\omega_s L_{sk} \underline{I}_{\mu g}$$

$$0 = \left(\frac{1}{2-j} R_R' + j\omega_s L_{R\sigma}' \right) \underline{I}_{Rg}' + j\omega_s L_{sk} \underline{I}_{\mu g}$$

$$\underline{I}_{\mu g} = \underline{I}_{sg} + \underline{I}_{Rg}'$$



c) Superposition:

aus den beiden Gleichungspaaren können die Zeiger $\underline{I}_{sm}, \underline{I}_{Rm}'$, $\underline{I}_{sg}$ und $\underline{I}_{Rg}'$ berechnet werden. Die resultierenden Stromamplituden sind dann:

$$\underline{i}_{s1}' = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\underline{I}_{sm} + \underline{I}_{sg}^* e^{-j2\omega_s t} \right) e^{j\varphi_{s0}},$$

$$\underline{i}_{R1}' = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\underline{I}_{Rm}' + \underline{I}_{Rg}^{1*} e^{-j2\omega_s t} \right) e^{j\varphi_{s0}}.$$

Das innere Drehmoment nach S.21 folgt daraus zu:

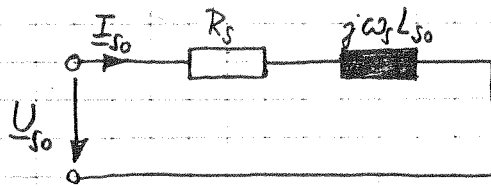
$$M_{i1} = 3p L_{sk} \operatorname{Im} \left\{ \underline{I}_{sm} \underline{I}_{Rm}'^* + \underline{I}_{sg}^* \underline{I}_{Rg}' + \underline{I}_{sm} \underline{I}_{Rg}' e^{j2\omega_s t} + \underline{I}_{sg}^* \underline{I}_{Rm}' e^{-j2\omega_s t} \right\},$$

es besteht aus den konstanten Drehmomenten von Mit- und Gegensystem und dem mit $2\omega_s$ sinusförmig veränderlichen Pendelmoment.

Die Nullkomponente des Statorstroms folgt mit $\underline{u}_{s0}$ aus der dritten - völlig entkoppelten Gleichung des Systems von S.21:

$$i_{s0} = \sqrt{6} \operatorname{Re} \{ \underline{I}_{s0} e^{j\omega_s t} \}$$

$$\underline{U}_{s0} = (R_s + j\omega_s L_{s0}) \underline{I}_{s0}$$



Bei der Grundwellenmaschine beeinflusst ein vorhandenes Nullstrom weder das Luftspaltfeld noch das innere Drehmoment.

Mittelwertbetrachtung:

$$\overline{M}_{ii} = M_{im} - M_{ig}$$

$$M_{im} = 3pL_{sk} \operatorname{Im} \{ \underline{I}_{sm} \underline{I}_{rm}'^* \} = -\frac{p}{\omega_s} 3 \operatorname{Re} \{ \underline{U}_{im} \underline{I}_{rm}'^* \} = \frac{p}{\omega_s} 3 \frac{R_R'}{s} I_{rm}^{12}$$

$$M_{ig} = -3pL_{sk} \operatorname{Im} \{ \underline{I}_{sg}'^* \underline{I}_{rg}' \} = -\frac{p}{\omega_s} 3 \operatorname{Re} \{ \underline{U}_{ig}' \underline{I}_{rg}'^* \} = \frac{p}{\omega_s} 3 \frac{R_R'}{2-s} I_{rg}^{12}$$

$$\underline{U}_{im} = j\omega_s L_{sk} \underline{I}_{pm}$$

$$\underline{U}_{ig}' = j\omega_s L_{sk} \underline{I}_{pg}$$

$$3 \frac{R_R'}{s} I_{rm}^{12} = \frac{\omega_s}{p} M_{im}$$

$$3 \frac{R_R'}{2-s} I_{rg}^{12} = \frac{\omega_s}{p} M_{ig}$$

$$\overline{P}_{mech} = \overline{M}_{ii} \frac{1}{p} j$$

Leistungsbilanz: $\overline{P}_{mech} + \overline{P}_{UR} = \frac{\omega_s}{p} (M_{im} + M_{ig})$

$$\overline{P}_{UR} = 3 R_R' (I_{rm}^{12} + I_{rg}^{12})$$

Über den Luftspalt vom Stator auf den Rotor wird im zeitlichen

Mittel die Leistung $\frac{\omega_s}{p} (M_{im} + M_{ig})$ übertragen.

Die Kennlinien $M_{im}(s)$ und $M_{ig}(s)$ kann man nach obigen Formeln berechnen (mittels Ersatzschaltbildes); sie ergeben sich unter den

Annahmen $\frac{R_s}{\omega_s L_{sk}} \ll 1$, $\sigma_s \ll 1$, $\sigma_R \ll 1$ zu:

$$\frac{M_{im}}{M_{mk}} = \frac{2 + \Delta}{\frac{s}{s_k} + \frac{s_k}{s} + \Delta}$$

$$\Delta = \frac{2 s_k R_s}{(1 + \sigma_s)^2 R_R'}$$

$$\frac{M_{ig}}{M_{gk}} = \frac{2 + \Delta}{\frac{2-s}{s_k} + \frac{s_k}{2-s} + \Delta}$$

$$M_{mk} = \frac{p}{\omega_s} \cdot \frac{3}{2} \frac{U_{sm}^2}{Z_k}$$

$$Z_k = R_s + \sqrt{\omega_s^2 (L_{ss} + L_{R\sigma}')^2 + R_s^2}$$

$$M_{gk} = \frac{p}{\omega_s} \cdot \frac{3}{2} \frac{U_{sg}^2}{Z_k}$$

$$s_k = \frac{R_R'}{\sqrt{\omega_s^2 (L_{ss} + L_{R\sigma}')^2 + R_s^2}}$$

M_{mk} und M_{gk} sind die motorischen Kippmomente die bei s_k bzw. $2-s_k$ auftreten; die bei $-s_k$ bzw. $2+s_k$ auftretenden generatorischen Kippmomente sind betragsmäßig größer, wenn man R_s nicht vernachlässigt ($\Delta \neq 0$):

$$M_{im}(-s_k) = -\frac{2+\Delta}{2-\Delta} M_{mk}$$

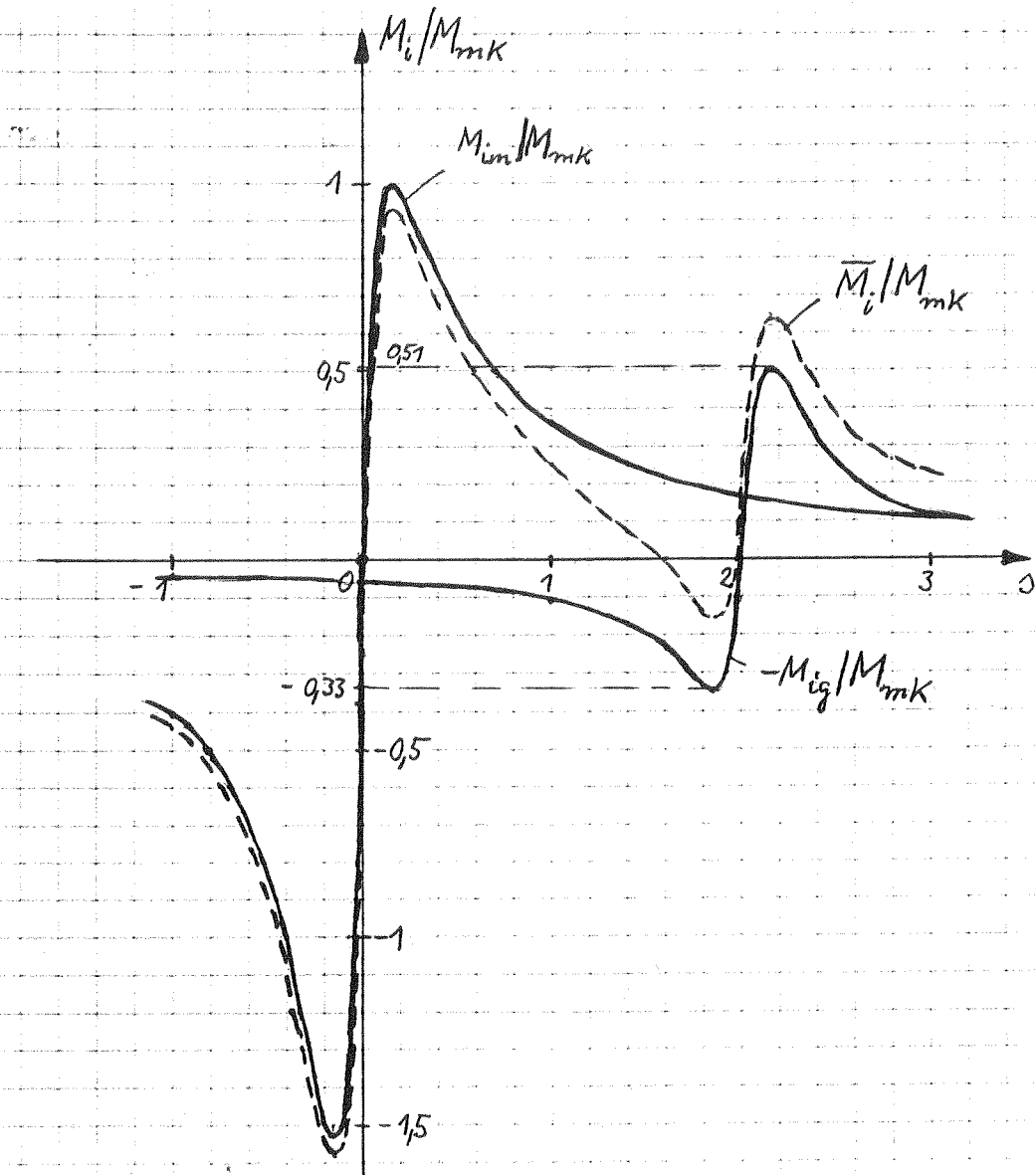
$$M_{ig}(2+s_k) = -\frac{2+\Delta}{2-\Delta} M_{gk}$$

Das folgende Diagramm zeigt ein Beispiel für die Daten:

$$s_k = 0,16 ; \quad \Delta = 0,42 ; \quad (U_{sm}/U_{sg})^2 = 3, \quad \begin{aligned} M_{im}(-s_k) &= -1,53 M_{mk} \\ M_{ig}(2+s_k) &= -1,53 M_{gk} \end{aligned}$$

Die Maschine würde im vom Mitsystem bestimmten Drehsinus anlaufen, jedoch mit einem durch das Gegensystem reduzierten Anzugsmoment.

Im Fall $U_{sm} = U_{sg}$ wäre das Anzugsmoment $\bar{M}_i(s=1) = 0$. Zu beachten



ist bei unsymmetrischer Speisung neben der Veränderung der Momenten-
Kennlinie auch die Erhöhung der Stromwärmeverluste; allgemein gilt:

$$P_{\text{os}} = 3 R_s (I_{s_m}^2 + I_{s_g}^2 + I_{s_0}^2),$$

$$P_{\text{ur}} = 3 R'_R (\underline{I}_{Rm}^2 + \underline{I}_{Rg}^2) = \underbrace{1}_{\substack{\omega_s \\ p}} \underline{M}_{im} + \underbrace{(2-1)}_{\substack{\omega_s \\ p}} \underline{M}_{ig}$$

zu obigem Beispiel bei $s=0,04$:

(mit Stromverdr. Verhältnis noch größer!)

Normalerweise ist das unsymmetrische Drehspannungssystem z.B. in der

Form $\underline{U}_{s1}, \underline{U}_{s2}, \underline{U}_{s3}$ gegeben. Daraus werden die symmetrischen Komponenten

$\underline{U}_{sm}, \underline{U}_{sg}, \underline{U}_{s0}$ bestimmt. Die Ersatzschaltbilder liefern dann für die
vorgegebene Drehzahl die symmetrischen Komponenten der Ströme

$\underline{I}_{sm}, \underline{I}'_{sm}, \underline{I}_{sg}, \underline{I}'_{sg}$ und $\underline{I}_{s0}$. Damit sind Zeitwert und Mittelwert des

inneren Drehmoments und die Stromwärmeverluste berechenbar.

Die Rücktransformation der Ströme nach S. 173 liefert die Zeitwerte der Strangstromre:

$$(i_s) = (C_s)(i'_s) \quad \theta_s = -\omega_s t + \theta_{s0}$$

$$(i'_R) = \ddot{u}(C_R)(i'_R) \quad \theta'_R = -\omega_s t + \gamma + \theta_{s0} = -\omega_s t + \theta_{s0} + \gamma$$

$$\gamma = \dot{\gamma} t + \gamma_0 = (1-s)\omega_s t + \gamma_0$$

Mit den für i_{s1} , i'_{R1} und i_{s0} gewonnenen Ausdrücken (S. 54 u. 55) ergibt die Rücktransformation ($i'_{R0} = 0$):

i_{s1}	$(I_{sm} + I_{sg} + I_{s0}) e^{j\omega_s t}$
i_{s2}	$(a^2 I_{sm} + a I_{sg} + I_{s0}) e^{j\omega_s t}$
i_{s3}	$(a I_{sm} + a^2 I_{sg} + I_{s0}) e^{j\omega_s t}$
i'_{R1}	$\ddot{u} I'_{Rm} e^{j(\omega_s t - \gamma_0)} + \ddot{u} I'_{Rg} e^{j[(1-s)\omega_s t + \gamma_0]}$
i'_{R2}	$a^2 \ddot{u} I'_{Rm} e^{j(\omega_s t - \gamma_0)} + a \ddot{u} I'_{Rg} e^{j[(1-s)\omega_s t + \gamma_0]}$
i'_{R3}	$a \ddot{u} I'_{Rm} e^{j(\omega_s t - \gamma_0)} + a^2 \ddot{u} I'_{Rg} e^{j[(1-s)\omega_s t + \gamma_0]}$

$= \sqrt{2} \operatorname{Re}$

Im Rotor treten zwei Frequenzen auf, ω_s vom Nulssystem herrührend und $(1-s)\omega_s$ vom Gegensystem herrührend.

Definition des Magnetisierungsstromraumvektors:

$$i_\mu = i_{s1} + i'_{R1}$$

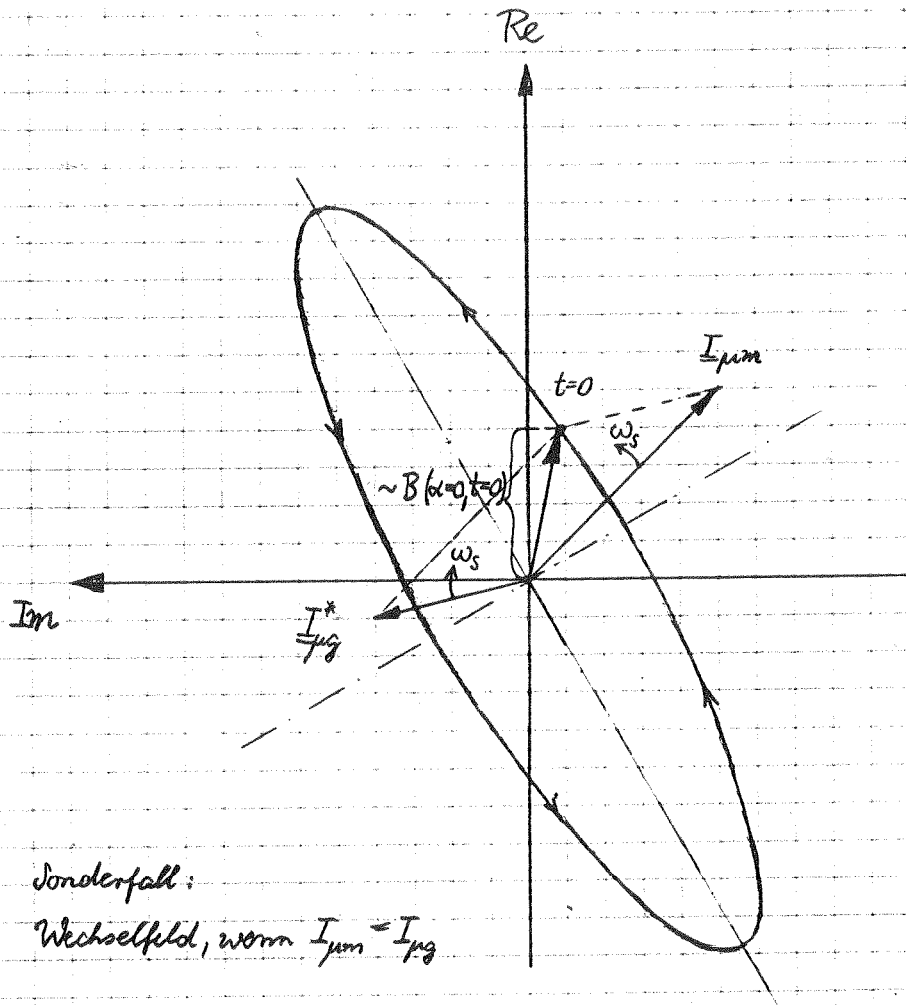
daraus folgt z. B. nach S. 21:

$$\psi_{s1} = L_{s\mu} i_\mu + L_{s0} i_{s1}$$

$$\psi'_{R1} = L_{s\mu} i_\mu + L'_{R0} i'_{R1}$$

Im Fall der unsymmetrischen Speisung wird

$$i_\mu = \frac{\sqrt{3}}{2} (I_{\mu m} + I_{\mu g}^* e^{-j2\omega_s t}) e^{j\theta_{s0}} \quad \theta_s = -\omega_s t + \theta_{s0}$$



Resultierendes Luftspaltfeld (allgemein):

$$B(\alpha, t) = \sqrt{3} \mu_0 \frac{w_s l_g}{p \pi d^2} 2 \cdot \operatorname{Re} \left\{ \underline{I}_{\mu} e^{-j(\alpha + \gamma_s)} \right\}$$

α gegenüber der Achse vom Stator S1 gemessen

Für unsymmetrische Speisung folgt mit $\gamma_s = -\omega_s t + \gamma_{s0}$:

$$B(\alpha, t) \sim \operatorname{Re} \left\{ (\underline{I}_{\mu m} e^{j\omega_s t} + \underline{I}_{\mu g}^* e^{-j\omega_s t}) e^{-j\alpha} \right\}$$

Der Zeitwert $B(\alpha=0, t)$ wird für ein Beispiel durch obige

Ortskurve veranschaulicht. Man spricht im unsymmetrischen Fall von einem elliptischen Drehfeld (symmetrischer Fall, $\underline{I}_{\mu m} = 0$ oder $\underline{I}_{\mu g} = 0$: Kreisfeld).

Einphasenmotor: Symmetrische Komponenten der Spannung vom Betriebspunkt abhängig!

Einphasenmotoren haben im Stator nur einen Strang und um den Anlauf zu ermöglichen einen z.B. über einen Kondensator an die gleiche Spannung angeschlossenen orthogonalen Hilfsstrang.

Stationärer Betrieb der einsträngigen Maschine:

$$\underline{U}_{S1} = U_{S1}$$

$$\underline{I}_{S2} = \underline{I}_{S3} = 0$$

Damit folgt aus

$$\begin{array}{c} \underline{I}_{S1} \\ \underline{I}_{S2} \\ \underline{I}_{S3} \end{array} = \frac{1}{3} \begin{array}{ccc} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \begin{array}{c} \underline{I}_{S1} \\ \underline{I}_0 \\ \underline{I}_{S3} \end{array}$$

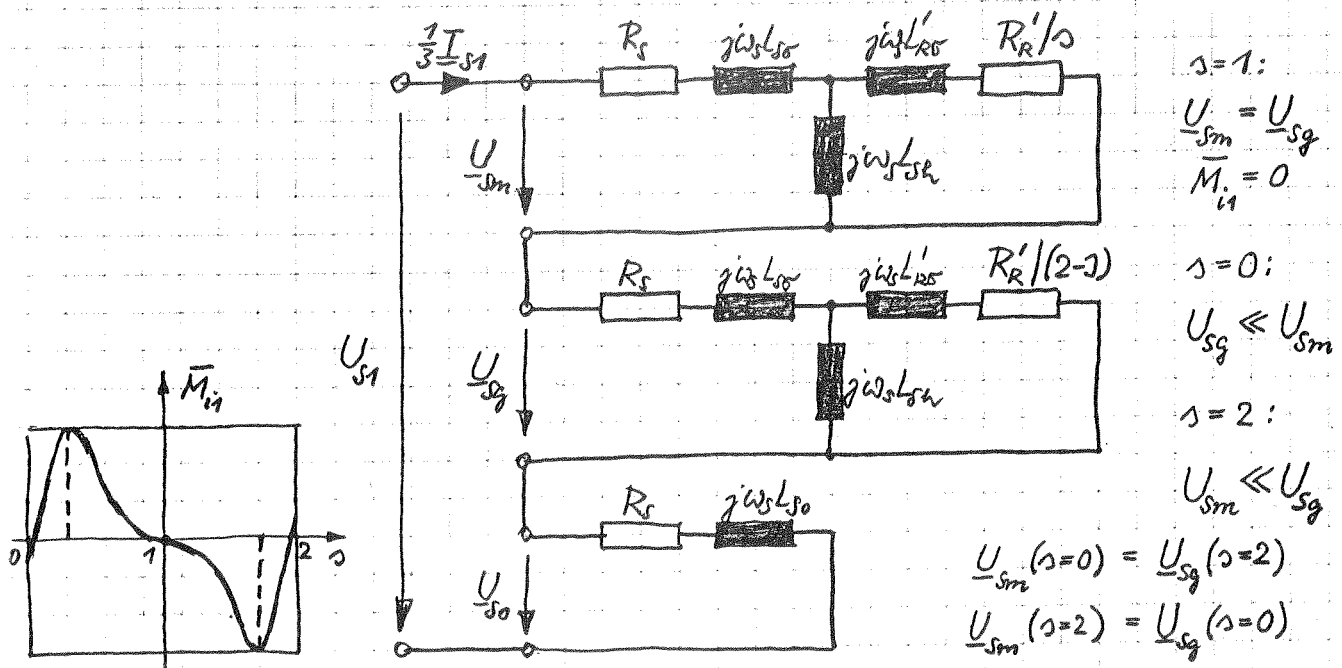
für die symmetrischen Komponenten der Ströme

$$\underline{I}_{S1} = \underline{I}_{S2} = \underline{I}_{S3} = \frac{1}{3} \underline{I}_{S1}$$

Für die symmetrischen Komponenten der Spannungen folgt nach 5.53

$$\underline{U}_{S1} + \underline{U}_{S2} + \underline{U}_{S3} = U_{S1}$$

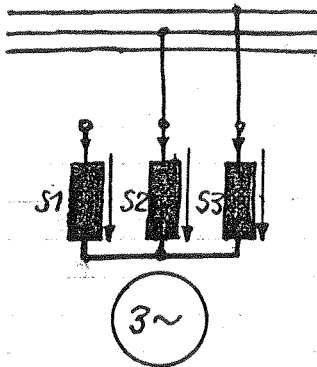
Mit beiden Bedingungen gewinnt man folgende Ersatzschaltbild:



Daraus können die Ströme und die fehlenden Spannungen berechnet werden.

Beispiel:

Unterbrechung eines Statorstroms (Sternschaltung)



$$i_{s3} = -i_{s2} \quad , \quad i_{s1} = 0$$

$$\underline{I}_{s3} = -\underline{I}_{s2} \quad , \quad \underline{I}_{s1} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_{sm} \\ \underline{I}_{sg} \\ \underline{I}_{s0} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_{s1} \\ \underline{I}_{s2} \\ \underline{I}_{s3} \end{bmatrix}$$

$$\underline{I}_{sm} = \frac{1}{3}(\underline{a} - \underline{a}^2)\underline{I}_{s2} = j\frac{1}{\sqrt{3}}\underline{I}_{s2}$$

$$\underline{I}_{sg} = \frac{1}{3}(\underline{a}^2 - \underline{a})\underline{I}_{s2} = -\underline{I}_{sm}$$

$$\underline{I}_{s0} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{sm} \\ \underline{U}_{sg} \\ \underline{U}_{s0} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_{s1} \\ \underline{U}_{s2} \\ \underline{U}_{s3} \end{bmatrix}$$

$$\underline{U}_{s2} - \underline{U}_{s3} = \underline{U}_v$$

$$\underline{U}_{s2} - \underline{U}_{s3} = \underline{U}_v$$

$$\underline{U}_{sm} - \underline{U}_{sg} = \frac{1}{3}(\underline{a} - \underline{a}^2)\underline{U}_{s2} + \frac{1}{3}(\underline{a}^2 - \underline{a})\underline{U}_{s3}$$

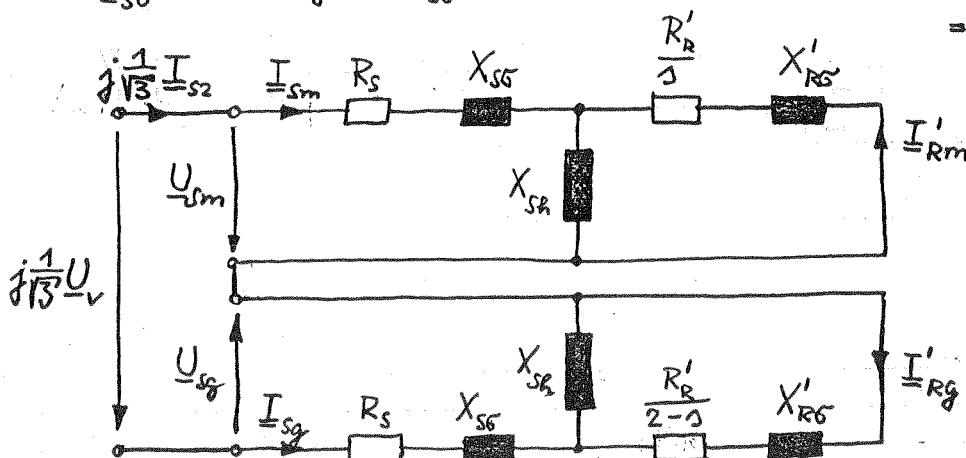
$$\underline{U}_{sm} - \underline{U}_{sg} = \frac{1}{3}(\underline{a} - \underline{a}^2)(\underline{U}_{s2} - \underline{U}_{s3})$$

$$\underline{U}_{sm} - \underline{U}_{sg} = j\frac{1}{\sqrt{3}}\underline{U}_v$$

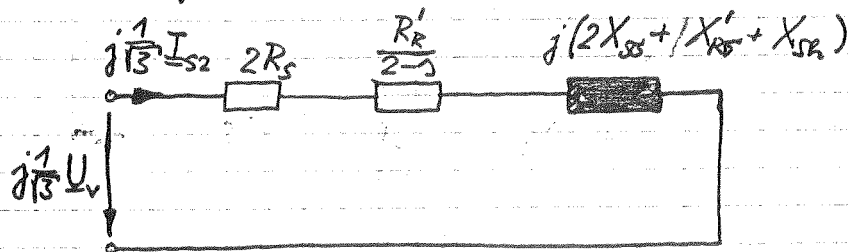
$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{s1} \\ \underline{U}_{s2} \\ \underline{U}_{s3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_{sm} \\ \underline{U}_{sg} \\ \underline{U}_{s0} \end{bmatrix}$$

$$\underline{U}_{s0} = 0 \quad \text{wegen} \quad \underline{I}_{s0} = 0$$

$$\underline{U}_v = \underline{U}_{s2} - \underline{U}_{s3} = (\underline{a}^2 - \underline{a})(\underline{U}_{sm} - \underline{U}_{sg})$$

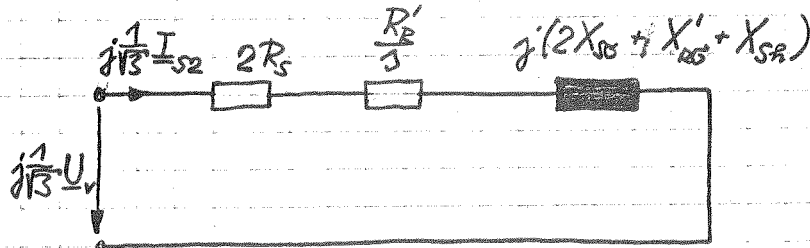


Näherung für $\delta \approx 0$: -62-



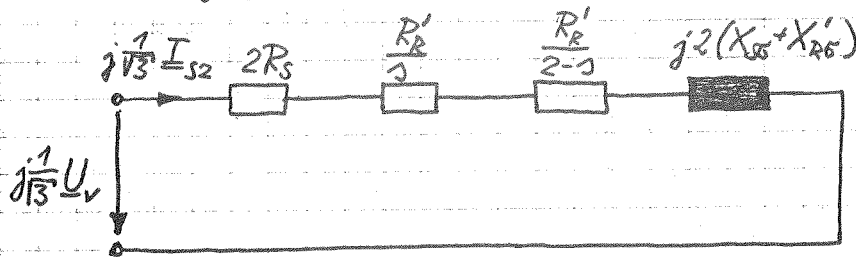
$$\begin{aligned} \underline{I}'_{Rm} &= 0 \\ \underline{I}'_{Rg} &= \underline{I}_{sm} = -\underline{I}_{sg} \\ \text{Im}\{\underline{I}_{sg}^* \underline{I}'_{Rg}\} &= 0 \end{aligned}$$

Näherung für $\delta \approx 2$:



$$\begin{aligned} \underline{I}'_{Rm} &= -\underline{I}_{sm} = \underline{I}_{sg} \\ \underline{I}'_{Rg} &= 0 \\ \text{Im}\{\underline{I}_{sm} \underline{I}'_{Rm}\} &= 0 \end{aligned}$$

Näherung für $\delta \approx 1$:

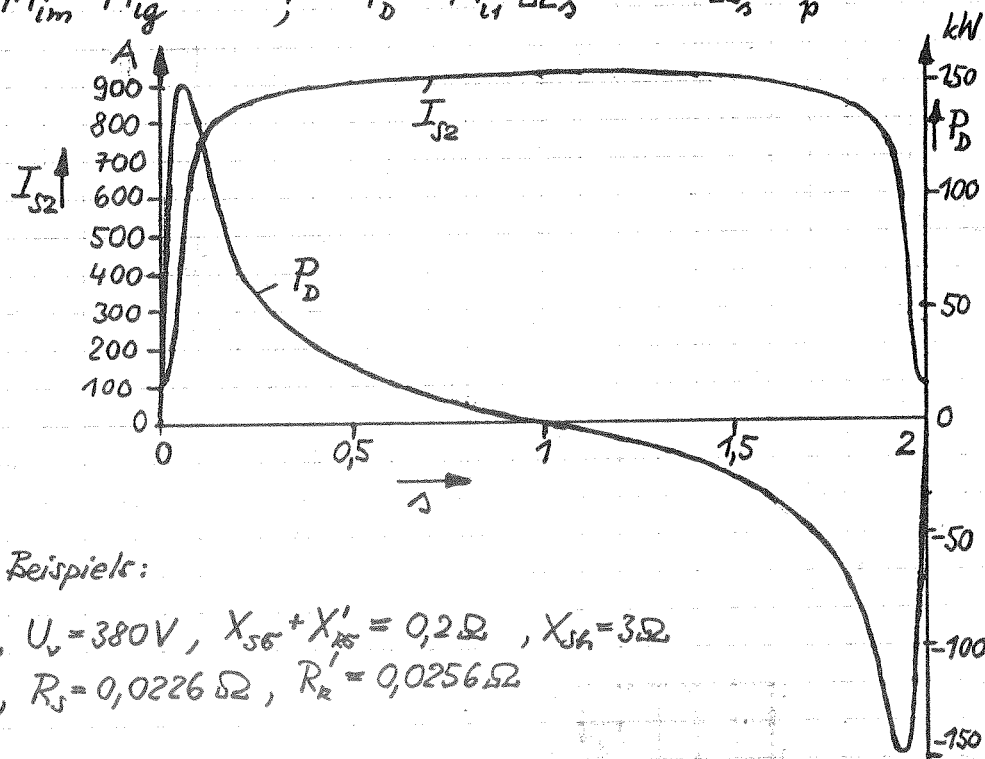


$$\begin{aligned} \underline{I}'_{Rm} &= -\underline{I}_{sm} \\ \underline{I}'_{Rg} &= \underline{I}_{sm} = -\underline{I}_{sg} \\ \text{Im}\{\underline{I}_{sm} \underline{I}'_{Rm}\} &= 0 \\ \text{Im}\{\underline{I}_{sg}^* \underline{I}'_{Rm}\} &= 0 \end{aligned}$$

Drehmoment:

$$M_{im} = 3 \frac{R'_R}{\delta \Omega_{\Delta}} I_{Rm}^{'2} ; \quad M_{ig} = 3 \frac{R'_R}{(2-\delta) \Omega_{\Delta}} I_{Rg}^{'2}$$

$$\overline{M}_{ii} = M_{im} - M_{ig} ; \quad P_D = \overline{M}_{ii} \Omega_{\Delta} \quad \Omega_{\Delta} = \frac{\omega_s}{p}$$



Daten des Beispiels:

$$\begin{aligned} P_N &= 125 \text{ kW}, \quad U_v = 380 \text{ V}, \quad X_{s\delta} + X'_{R\delta} = 0,2 \Omega, \quad X_{sR} = 3 \Omega \\ I_{sN} &= 234 \text{ A}, \quad R_s = 0,0226 \Omega, \quad R'_R = 0,0256 \Omega \end{aligned}$$

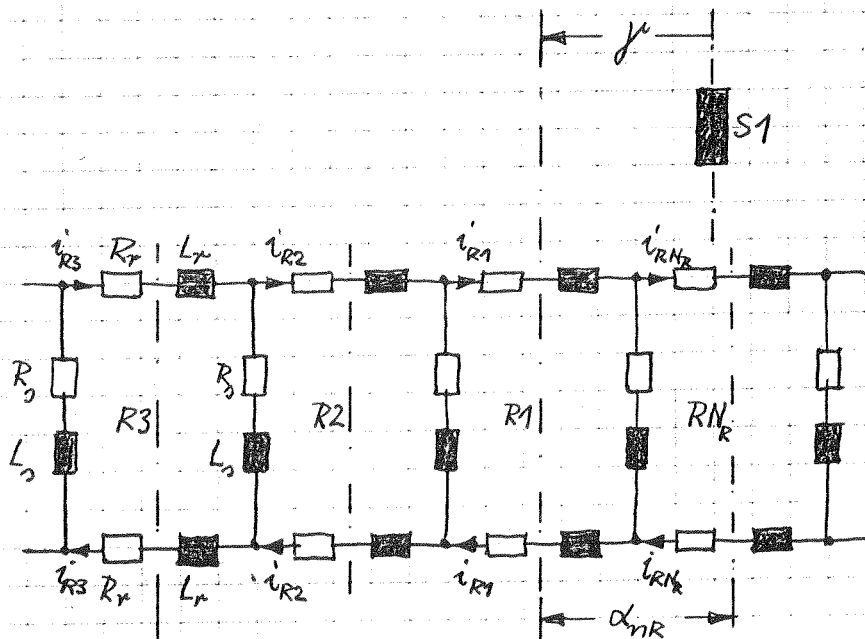
6. Käfigläufermaschine:

Das Grundwellenmodell der Käfigläufermaschine stimmt mit dem der kurzgeschlossenen Schleifringläufermaschine überein. Die Rotorparameter bestimmen sich dann wie folgt:

$$R'_R = \frac{3(\omega_s L_{s1})^2}{N_R (1/2)^2 \chi_1^2} \left[\frac{R_r}{2 \sin^2(\alpha_{mR}/2)} + R_o \right] \quad ; \quad \alpha_{mR} = \frac{2p\pi}{N_R}$$

$$L'_{R0} = \frac{3(\omega_s L_{s1})^2}{N_R (1/2)^2 \chi_1^2} \left[\frac{L_r}{2 \sin^2(\alpha_{mR}/2)} + L_o \right] + G_{ORK} L_{sk}$$

$$G_{ORK} = \frac{1 - \left(\frac{\sin \alpha_{mR}/2}{\alpha_{mR}/2} \chi_1 \right)^2}{\left(\frac{\sin \alpha_{mR}/2}{\alpha_{mR}/2} \chi_1 \right)^2}$$



Käfigquerschnitt abgewickelt

Maschen- oder Ringströme:

$$i_{Rk} = \frac{2\dot{u}}{\sqrt{N_R}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{-(k-1)p}}{-R} \frac{i_{R1}}{\chi_1} e^{j\tau_R} \right\}$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, N_R$$

$$\dot{u} = \frac{3 \omega_s L_{s1}}{\sqrt{3} N_R \sin(p\pi/N_R)} \frac{1}{\chi_1}$$

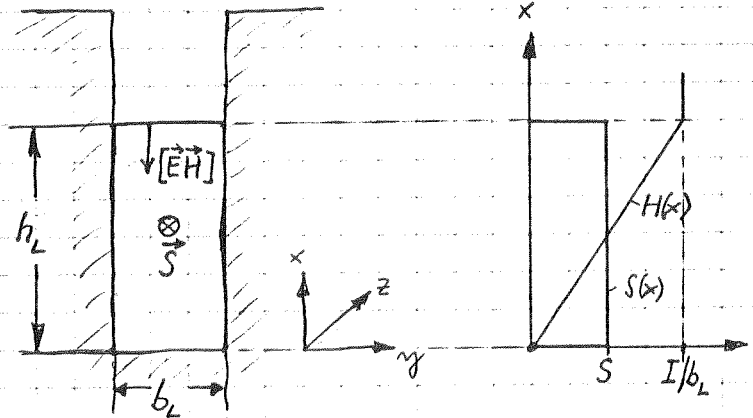
$$\alpha_R = e^{j2\pi/N_R}$$

7. Stromverdrängung beim Käfigläufer:

Widerstand R_s und Induktivität L_s des in Eisen eingebetteten Leiterstäbe sind von der Rotorfrequenz $s\omega_s$ abhängig. Damit werden auch die Parameter R'_R und L'_{R0} frequenz- bzw. drehzahlabhängig. Stromverdrängung bewirkt eine Erhöhung des Widerstands und eine Erniedrigung der Induktivität. Sie hängt von der Leitergeometrie und der Rotorfrequenz ab. Der maximale Effekt tritt bei der höchsten Frequenz auf, beim normalen Motorbetrieb also im Stillstand ($s=1$).

Die dann eintretende Widerstandserhöhung hat eine Erhöhung des Anzugsmoments (gegenüber dem Fall vernachlässigter Stromverdrängung) zur Folge. Durch zweckmäßige Gestaltung des Leiterquerschnitts (Hochstab- oder Tiefmitläufer) kann man eine wesentliche Erhöhung des Anzugsmoments erzielen. Im Nennbetrieb sinkt die Rotorfrequenz so weit ab ($s=s_N \ll 1$), daß praktisch keine Stromverdrängung mehr wirksam ist. Um die Betriebskennlinien von Stromverdrängungsläufer-Motoren berechnen zu können (z.B. aus dem Ersatzschaltbild) braucht man die Frequenzabhängigkeit von R'_R und L'_{R0} bzw. R_s und L_s . Sie wird im folgenden für Rechteckleiter hergeleitet.

bei Gleichstrom:



Voraussetzungen:

a) ebenes Problem $S_x=0, S_y=0, S_z=S \neq 0$

$$\vec{E} = \rho \vec{S} \leadsto E_x=0, E_y=0, E_z=E=\rho S$$

b) $\mu_{Fe} \rightarrow \infty, \rho_{Fe} \rightarrow \infty$

c) Temperaturabhängigkeit von ρ vernachlässigt

d) eindimensionale Stromverdrängung

$$H_x=0, H_z=0, H_y(x)=H \neq 0$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \leadsto B_x=0, B_z=0, B_y=B=\mu_0 H$$

e) Feldverzerrung an der Stütöffnung unberücksichtigt

Ist der Leiterstrom ein Gleichstrom, dann tritt keine Stromverdrängung auf:

$$S = \frac{I}{b_L h_L}, \quad E = \rho S$$

$$\text{volumenspezifische Verluste: } v = ES = \rho S^2$$

$$\text{Verluste: } P_v = v \cdot b_L h_L l = R_0 I^2$$

$$\text{daraus folgt der Gleichstromwiderstand: } R_0 = \rho \frac{l}{b_L h_L}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{S} \leadsto \frac{dH}{dx} = S$$

$$\text{mit } H(x=0)=0 \text{ folgt } H(x) = Sx$$

$$H(x=h_L) = S h_L = \frac{I}{b_L}$$

$$\text{Dichte der magnetischen Energie: } w_m = \frac{1}{2} \mu_0 H^2(x)$$

im Leiter Volumen gespeicherte magnetische Energie:

$$W_m = \int_{x=0}^{h_L} w_m dx = \frac{1}{2} L_0 I^2$$

daraus folgt die Gleichstrominduktivität: $L_0 = \mu_0 \ell \frac{h_L}{3b_L}$

(es handelt sich um eine Teilinduktivität, die aus der Feldenergie im Leiter Volumen resultiert)

Die bei Gleichstrom im Leiter Volumen auftretenden Verluste P_v lassen sich auch aus dem Flächenintegral des Energieströmungsvektors (nach Poynting u. Heaviside) $[\vec{E} \vec{H}]$ ermitteln:

$$\oint_a [\vec{E} \vec{H}] d\vec{a} = \ell b_L E(x=h_L) H(x=h_L) = \ell b_L \rho S S h_L = P_v$$

$[\vec{E} \vec{H}] d\vec{a}$ ist nur an der Leiteroberkante von null verschieden.

Ist der Leiterstrom zeitlich veränderlich, dann muß man zur Berechnung der Feldstärke und der Stromdichteverteilung die Maxwell'schen Gleichungen heranziehen. Die auftretenden Frequenzen seien beschränkt, sodaß der Verschiebungsstrom vernachlässigt werden kann.

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \vec{J} & \vec{B} &= \mu_0 \vec{H} & \text{div } \vec{B} &= 0 \\ \text{rot } \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \rho \vec{J} &= \vec{E} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \frac{1}{\rho} \vec{E} \\ \text{rot rot } \vec{H} &= \frac{1}{\rho} \text{rot } \vec{E} \\ \text{rot rot } \vec{H} &= - \frac{\mu_0}{\rho} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \end{aligned}$$

mathem. Satz: $\text{rot rot } \vec{H} = \text{grad div } \vec{H} - \Delta \vec{H}$

durch Vergleich und mit $\text{div } \vec{B} = 0$ daraus:

$$\Delta \vec{H} = \frac{\mu_0}{\rho} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

mit den eingangs gemachten Voraussetzungen folgt die partielle

Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 H(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\mu_0}{\rho} \frac{\partial H(x,t)}{\partial t}$$

Aus dem Induktionsgesetz kann man die genau gleiche Differentialgleichung für $S(x,t)$ herleiten. Einfacher gewinnt man S aus H über $\vec{S} = \text{rot } \vec{H}$:

$$S(x,t) = \frac{\partial H(x,t)}{\partial x}$$

Mit den Randbedingungen

$$H(x=0, t) = 0 \quad \text{und} \quad H(x=h_L, t) = \frac{i(t)}{b_L}$$

ist das Problem mathematisch bestimmt.

Hier soll eine analytische Lösung für $H(x,t)$ und $S(x,t)$ für den stationären Fall mit sinusförmigem Leiterstrom

$$i(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{I e^{j\omega t}\}$$

gefunden werden. Da es sich um einen linearen Effekt handelt, sind folgende Ansätze möglich:

$$H(x,t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{\underline{H}(x) e^{j\omega t}\}$$

$$S(x,t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{\underline{S}(x) e^{j\omega t}\}$$

$\underline{H}$ und $\underline{S}$ sind komplexe Effektivwerte, z.B. $\underline{H}(x) = H_{eff}(x) e^{j\varphi_H(x)}$

Geht man auf die komplexen Größen über, dann erhält man aus der partiellen Differentialgleichung folgende gewöhnliche:

$$\frac{d^2 \underline{H}(x)}{dx^2} = j \frac{\omega \mu_0}{\rho} \underline{H}(x)$$

Anßerdem ist

$$\underline{S}(x) = \frac{d \underline{H}(x)}{dx}$$

Die Randbedingungen lauten dann:

$$\underline{H}(x=0) = 0 \quad \text{und} \quad \underline{H}(x=h_L) = \frac{\underline{I}}{b_L}$$

Allgemeine Lösung der Diff. Gleichung:

$$\underline{H}(x) = A \cosh kx + B \sinh kx$$

$$\text{mit } k^2 = j \frac{\omega \mu_0}{\rho}$$

$$\underline{H}(0) = 0 \quad \wedge \quad A = 0$$

$$\underline{H}(h_L) = \frac{I}{b_L} \quad \wedge \quad B = \frac{I}{b_L \sinh kh_L}$$

Spezielle Lösung: $\underline{H}(x) = \frac{I \sinh kx}{b_L \sinh kh_L} = H_{\text{eff}}(x) e^{j\varphi_H(x)}$

$$\underline{S}(x) = \frac{dH(x)}{dx} = \frac{Ik \cosh kx}{b_L \sinh kh_L} = S_{\text{eff}}(x) e^{j\varphi_S(x)}$$

$$kh_L = \sqrt{2j} \sqrt{\frac{\pi f \mu_0}{\rho}} h_L$$

$$kh_L = (1+j) \xi$$

$$\xi = \sqrt{\frac{\pi f \mu_0}{\rho}} h_L \quad \text{„reduzierte Leiterhöhe“}$$

(dimensionslos)

Für Cu-Leiter gilt:

$$\rho = \frac{1}{57} \frac{255 \text{ grad} + \vartheta}{255 \text{ grad}} 10^{-6} \Omega \text{m}$$

ϑ , Übertemperatur über 20°C

$$\text{mit } \mu_0 = 0,4 \pi 10^{-6} \frac{\Omega \text{s}}{\text{m}} \text{ folgt}$$

$$\xi_{\text{Cu}} = 1,06 \sqrt{\frac{f}{50 \text{ Hz}} \frac{255 \text{ grad}}{255 \text{ grad} + \vartheta}} \frac{h_L}{\text{cm}}$$

$$\vartheta \approx 30 \text{ grad}, f = 50 \text{ Hz} : \xi_{\text{Cu}} \approx \frac{h_L}{\text{cm}}$$

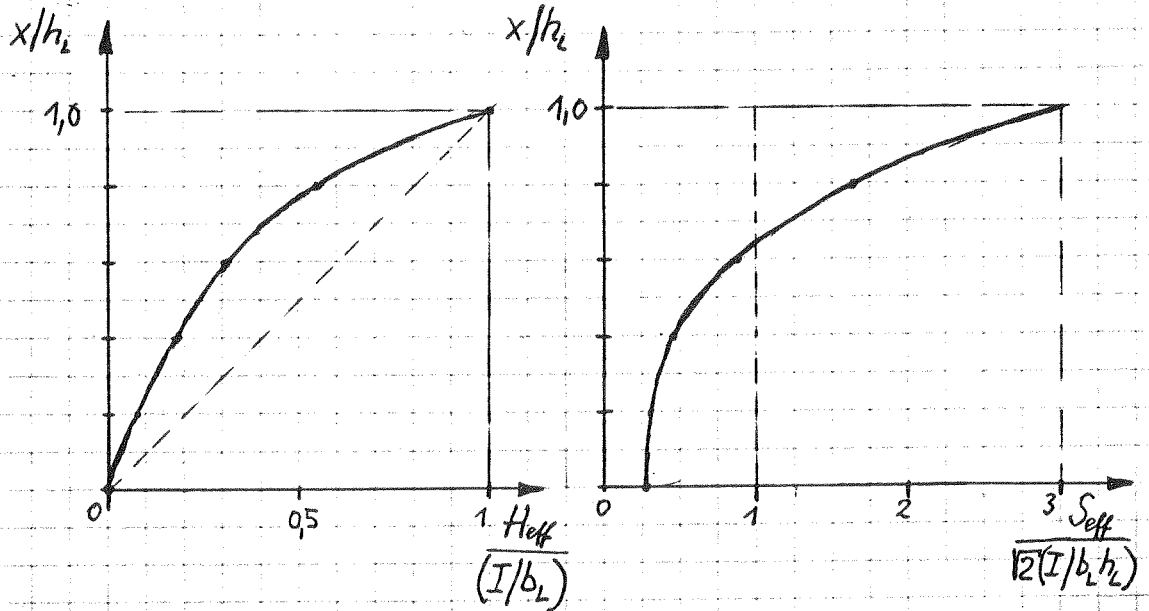
Aus obigen Lösungen erhält man:

$$H_{\text{eff}}(x) = \frac{I}{b_L} \sqrt{\frac{\cosh(2\xi x/h_L) - \cos(2\xi x/h_L)}{\cosh 2\xi - \cos 2\xi}}$$

$$S_{eff}(x) = \frac{I}{b_L h_L} \sqrt{2} \sqrt{\frac{\cosh(2\xi x/h_L) + \cos(2\xi x/h_L)}{\cosh 2\xi - \cos 2\xi}}$$

Beispiel für $\xi = 3$:

$$\text{Stabverluste} = \rho b_L l \int_{x=0}^{h_L} S_{eff}^2(x) dx$$



Berechnung des Phasenwinkels der Stromdichte:

mit $I = I$

$$\underline{S}(x) = \frac{I \xi}{b_L h_L} \frac{(1+j) \cosh(1+j)\xi x/h_L}{\sinh(1+j)\xi} = S_{eff}(x) e^{j\varphi_S(x)}$$

$$\cosh(1+j)\xi \frac{x}{h_L} = \cosh \xi \frac{x}{h_L} \cos \xi \frac{x}{h_L} + j \sinh \xi \frac{x}{h_L} \sin \xi \frac{x}{h_L}$$

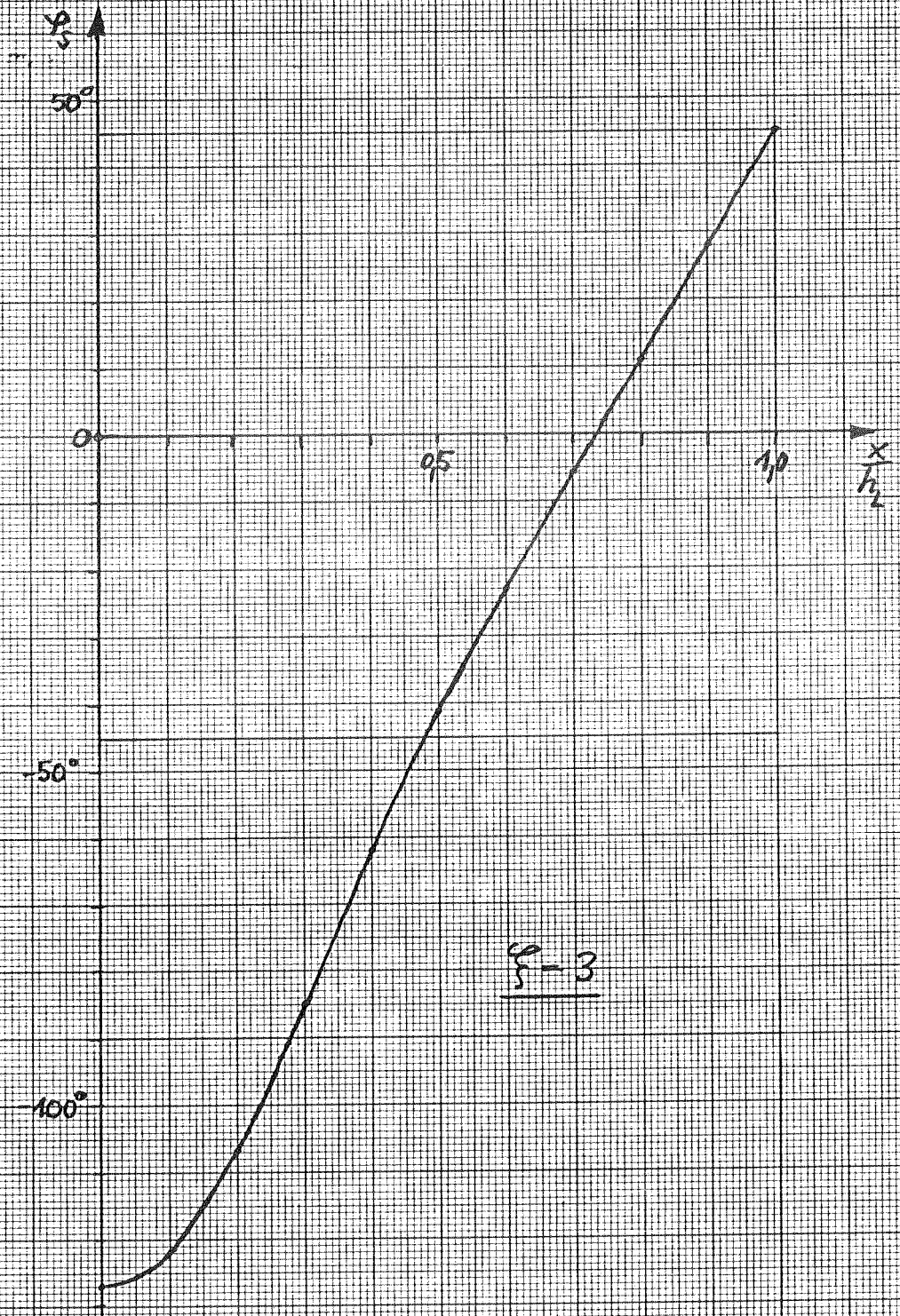
$$\sinh(1+j)\xi = \sinh \xi \cos \xi + j \cosh \xi \sin \xi$$

$$\underline{S}(x) = \frac{I \xi}{b_L h_L} \frac{(1+j)(a+jb)(\alpha-j\beta)}{(\alpha+j\beta)(\alpha-j\beta)}$$

$$\tan \varphi_S(x) = \frac{a(\alpha-\beta) + b(\alpha+\beta)}{a(\alpha+\beta) - b(\alpha-\beta)}$$

$\xi = 3$:

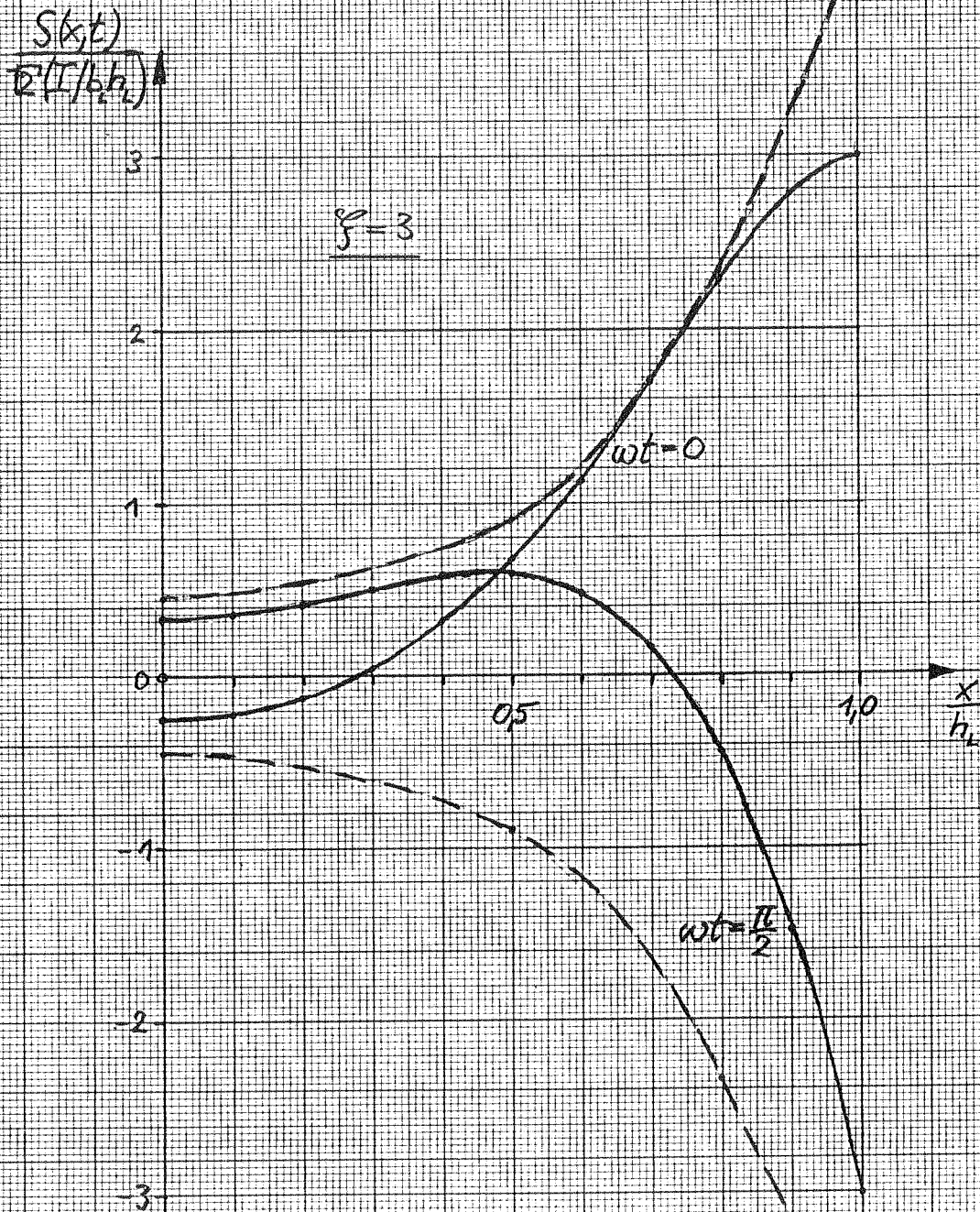
$\frac{x}{h_L}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\varphi_S / ^\circ$	-126,85	-121,7	-106,67	-84,78	-61,85	-41,33	-23,01	-5,77	11,13	28,05	45,08
$\frac{S_{eff}}{(\sqrt{2} I / (b_L h_L))}$	0,299	0,300	0,312	0,359	0,465	0,638	0,884	1,214	1,652	2,234	3,01



$$I = I_0, \quad i(t) = \sqrt{2} I_0 \cos \omega t$$

$$\frac{S(x)}{(I/b_2 h_2)} = k h_2 \frac{\cosh k h_2 (x/h_2)}{\sinh k h_2} = \frac{S_{eff}(x)}{(I/b_2 h_2)} e^{j \varphi(x)}$$

$$k h_2 = (1+j) \sqrt{\xi}$$



$$\frac{S(x,t)}{E(I/b_0 h_0)} = \frac{S_{0f}(x)}{(I/b_0 h_0)} \cos[wt + \varphi_f(x)]$$

$$\frac{\ddot{u}(t)}{EI} = \cos wt = \int_{x/h_0=0}^1 \frac{S(x,t)}{E(I/b_0 h_0)} d(x/h_0)$$

$$\frac{S_{0f}(x=h_0)}{(I/b_0 h_0)} = 4,26$$

Berechnung von Augenblicksverläufen der Stromdichte:

$$i(t) = \sqrt{2} I \cos \omega t = b_L \int_{x=0}^{b_L} S(x,t) dx$$

$$S(x,t) = \sqrt{2} S_{eff}(x) \cos[\omega t + \varphi_s(x)]$$

Beispiele: $\omega t = 0 \leadsto i(0) = \sqrt{2} I$

$\omega t = \pi/2 \leadsto i(90^\circ) = 0$

Beim Strommaldurchgang tritt ein von null verschiedener Momentanwert der Stromwärmeverluste

$$\rho b_L \int_{x=0}^{b_L} S^2(x,t) dx$$

auf:

$$S^2(x,t) = S_{eff}^2(x) (1 + \cos 2[\omega t + \varphi_s(x)])$$

Leistungsberechnung mit Hilfe des Poynting'schen Vektors:

Satz von Gauß $\oint_a [\vec{E} \vec{H}] d\vec{a} = - \int_{\tau} \text{div} [\vec{E} \vec{H}] d\tau$

$$\begin{aligned} -\text{div} [\vec{E} \vec{H}] &= \vec{E} \text{rot} \vec{H} - \vec{H} \text{rot} \vec{E} \\ &= \vec{E} \vec{S} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

(Verschiebungstrom vernachlässigt!)

$$\oint_a [\vec{E} \vec{H}] d\vec{a} = \int_{\tau} \left(\vec{E} \vec{S} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) d\tau = P_v(t) + \frac{dW_m(t)}{dt}$$

Die in den Leiter pro Zeiteinheit strömende Energie ist gleich der Summe aus Stromwärmeverluste und Änderung der magnetischen Energie pro Zeiteinheit.

Übergang auf komplexe Effektivwerte:

$$\oint_a [\vec{E} \vec{H}^*] d\vec{a} = \int_{\tau} (\rho \vec{S} \vec{S}^* + j \mu_0 \omega \vec{H} \vec{H}^*) d\tau = P_v + j Q$$

komplexe Scheinleistung des Leiters

$$\int_{\tau} \underline{\vec{S}} \underline{\vec{S}}^* d\tau = \int_{\tau} \rho S_{\#}^2 d\tau = P_v = R I^2$$

$$\int_{\tau} \mu_0 \omega \underline{\vec{H}} \underline{\vec{H}}^* d\tau = \int_{\tau} \mu_0 \omega H_{\#}^2 d\tau = \omega \hat{W}_m = Q = \omega L I^2$$

$$\oint_a [\underline{\vec{E}} \underline{\vec{H}}^*] d\vec{a} = (R + j \omega L) I^2$$

$$\oint_a [\underline{\vec{E}} \underline{\vec{H}}^*] d\vec{a} = \ell b_L \rho \underline{S}(x=h_L) \underline{H}^*(x=h_L)$$

$$\underline{H}(x=h_L) = \frac{I}{b_L} \quad (\text{Voraussetzung: } \underline{I} = I)$$

$$\underline{S}(x=h_L) = \frac{I}{b_L h_L} \left[\int \frac{\sinh 2\mathcal{F} + \sin 2\mathcal{F}}{\cosh 2\mathcal{F} - \cos 2\mathcal{F}} + j \int \frac{\sinh 2\mathcal{F} - \sin 2\mathcal{F}}{\cosh 2\mathcal{F} - \cos 2\mathcal{F}} \right]$$

Durch Vergleich erhält man den frequenzabhängigen Widerstand

$$\boxed{R = \varphi(\mathcal{F}) \cdot R_0}$$

$$\text{mit } \varphi(\mathcal{F}) = \int \frac{\sinh 2\mathcal{F} + \sin 2\mathcal{F}}{\cosh 2\mathcal{F} - \cos 2\mathcal{F}}$$

$$\mathcal{F} > 3 : \quad \varphi(\mathcal{F}) \approx \mathcal{F} \quad \leadsto R \sim \sqrt{\omega}$$

und die frequenzabhängige Induktivität

$$\boxed{L = \varphi'(\mathcal{F}) L_0}$$

$$\text{mit } \varphi'(\mathcal{F}) = \frac{3}{2\mathcal{F}} \frac{\sinh 2\mathcal{F} - \sin 2\mathcal{F}}{\cosh 2\mathcal{F} - \cos 2\mathcal{F}}$$

$$\mathcal{F} > 3 : \quad \varphi'(\mathcal{F}) \approx \frac{3}{2\mathcal{F}} \quad \leadsto X = \omega L \sim \sqrt{\omega}$$

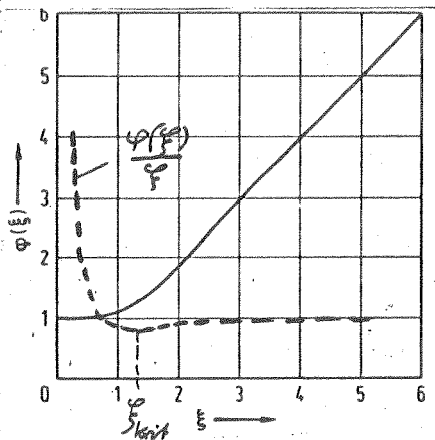
Die Näherungen für $\xi > 3$ führen zu folgenden

Grenzwerten:

$$R_G = \omega L_G = \rho \frac{l}{b_L e}$$

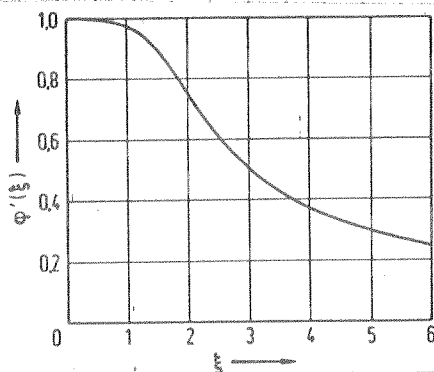
mit der sog. Eindringtiefe $e = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_0 \rho}}$

Widerstand R und Reaktanz ωL nehmen mit wachsender Frequenz zu,
während die Induktivität L abnimmt.



cu 20°C 50 Hz:

$$h_{L, krit.} = 1,26 \text{ cm}$$



Verluste im Leiter:

$$P_v = \rho \frac{l}{b_L h_L} I^2 \varphi(\xi)$$

$$P_v = \rho \frac{l}{b_L} I^2 \frac{\sqrt{\pi f \mu_0}}{\rho} \frac{\varphi(\xi)}{\xi}$$

ρ, l, b_L, I, f konstant

$$P_v(h_L) \stackrel{!}{=} \text{Minimum: } h_L = h_{L, \text{krit}}, \quad \xi = \xi_{\text{krit}}$$

kritische Leiterhöhe $h_{L, \text{krit}}$

Für $h_L > h_{L, \text{krit}}$ steigen die Verluste trotz Querschnittsvergrößerung wieder an!

Entwicklung eines Kettenleitermodells für den in Eisen eingebetteten

Rechteckestab ($I = I$):

nach S. 73 u. 68

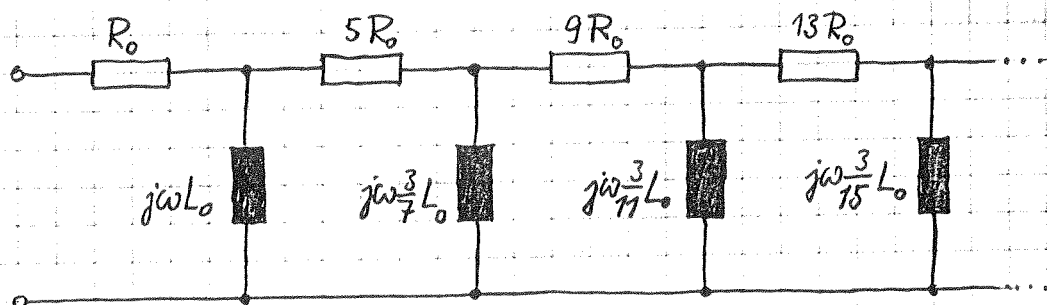
$$\underline{Z} = S(x=h_L) H^*(x=h_L) l b_L \rho \frac{1}{I^2}$$

$$\underline{Z} = (R + j\omega L) = l b_L \rho \frac{1}{b_L} \frac{k \cosh kh_L}{b_L \sinh kh_L}$$

$$\underline{Z} = R_0 kh_L \frac{1}{\tanh kh_L}$$

$$\tanh kh_L = kh_L - \frac{1}{3}(kh_L)^3 + \frac{2}{15}(kh_L)^5 - \frac{17}{315}(kh_L)^7 + \frac{62}{2835}(kh_L)^9 + \dots$$

(Bronstein S. 282)



Da es sich bei der Stromverdrängung nicht um den hier gemachten Voraussetzungen um einen linearen Effekt handelt, kann dieses Kettenleitermodell auch zur Berechnung von Übergangsvorgängen benutzt werden.

Impedanz des Kettenleitermodells als Kettenbruch geschrieben:

$$\underline{Z} = R_0 + \frac{1}{\frac{1}{j\omega L_0} + \frac{1}{5R_0 + \frac{1}{\frac{1}{j\omega \frac{3}{7}L_0} + \frac{1}{9R_0 + \frac{1}{\frac{1}{j\omega \frac{3}{11}L_0} + \frac{1}{13R_0 + \dots}}}}}}$$

Die Berücksichtigung von 3 Maschen (6. Näherung) ergibt bereits eine sehr gute Näherung für $\underline{Z}$.

Beispiel: $\varphi = 3$

Wegen $\omega L_0 = \frac{2}{3} \varphi^2 R_0$ ist dann $\omega L_0 = 6 R_0$ (Rechteckleiter)
Die Berechnung von 6 Näherungen zeigt die gute Konvergenz:

$$\underline{Z}_1 = R_0$$

$$\underline{Z}_2 = R_0 (1 + j6)$$

$$\underline{Z}_3 = R_0 \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{j6} + \frac{1}{5}} \right) = R_0 (3,95 + j2,46)$$

$$\underline{Z}_4 = R_0 \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{j6} + \frac{1}{5 + j\frac{3}{7}6}} \right) = R_0 (2,83 + j2,87)$$

$$\underline{Z}_5 = R_0 \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{j6} + \frac{1}{5 + \frac{1}{\frac{1}{j\frac{3}{7}6} + \frac{1}{9}}}} \right) = R_0 (3,00 + j3,06)$$

$$\underline{Z}_6 = R_0 \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{j6} + \frac{1}{5 + \frac{1}{\frac{1}{j\frac{3}{2}6} + \frac{1}{9 + j\frac{3}{11}6}}} \right) = R_0 (3,01 + j3,02)$$

Die direkte Berechnung aus

$$\underline{Z} = R_0 kh_L \frac{1}{\tanh kh_L}$$

mit $kh_L = (1+j)\xi$ ergibt mit $\xi=3$

$$\underline{Z} = R_0 (3,01 + j3,02)$$

Mit den für $\xi > 3$ geltenden Näherungen folgt:

$$R \approx \xi R_0 = 3 R_0$$

$$L \approx \frac{3}{2\xi} L_0 = \frac{1}{2} L_0$$

und mit $\omega L_0 = 6 R_0$ ist $\omega L \approx 3 R_0$

Einfluss der Stromverdrängung auf das Anzugsmoment:

$$\frac{\omega_s}{p} M_a = 3 R'_R I_{RK}^2 \quad s=1$$

$$I_{RK}^2 \approx \frac{U_s^2}{(R_s + R'_R)^2 + (X_{s\sigma} + X'_{R\sigma})^2}$$

$$M_a \approx \frac{3p}{\omega_s} \frac{R'_R}{(R_s + R'_R)^2 + (X_{s\sigma} + X'_{R\sigma})^2} U_s^2$$

$$R'_R = c \left[\frac{R_r}{2\pi i^2 (\alpha_{mr}/2)} + \varphi(\frac{r}{\delta}) R_{\sigma 0} \right]$$

$$c = \frac{(n_s \varphi_{s1})^2 3}{(1/2)^2 N_R^2 X_1^2}$$

$R_{\sigma 0}$, Gleichstromwiderstand des in Eisen eingeleiteten Leiters

$$X'_{R\sigma} = c \omega_s \left[\frac{L_r}{2\pi i^2 (\alpha_{mr}/2)} + L_{\sigma 0} + \varphi'(\frac{r}{\delta}) L_{\sigma 0} \right] + G_{ORR} X_{se}$$

$L_{\sigma 0}$, Gleichstrominduktivität bezüglich des Leiter Volumens

$L_{\sigma 0}$, Induktivität bezügl. des Feldraumes oberhalb des Leiters (Nutshöhe)

keine Stromverdrängung: $\varphi(\frac{r}{\delta}) = 1$, $\varphi'(\frac{r}{\delta}) = 1$
(z.B. Cu-Leiter $h_L < 10\text{mm}$, 50 Hz)

Stromverdrängung (z.B. Cu-Leiter $h_L = 30\text{mm}$, 50 Hz):

$$\varphi(\frac{r}{\delta}) \approx 3, \quad \varphi'(\frac{r}{\delta}) \approx 0,5$$

Einfluss der Stromverdrängung auf die Rotorverluste durch Harmonische bei $s=0$:

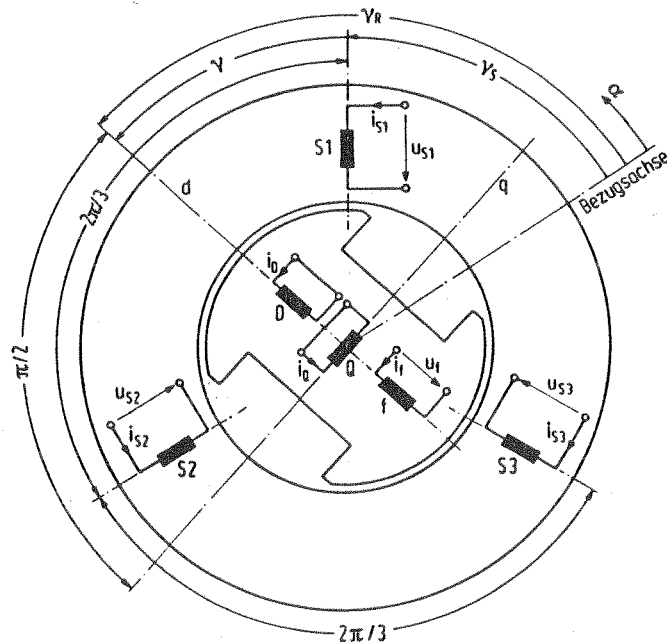
Rotorfrequenzen nach S. 33/34: $(kv-1+s)\omega_s = \frac{v}{k} \omega_s$

$$s=0 \rightarrow s_v = 1 - \frac{k}{v}$$

$$v=5 \quad k=-1 \rightarrow s_v = 1 + \frac{1}{5}$$

$$v=7 \quad k=1 \rightarrow s_v = 1 - \frac{1}{7}$$

8. Systemgleichungen der Drehstromsynchronmaschine:



$$\begin{pmatrix} u_s \\ u_f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_s & & & \\ & R_f & & \\ & & R_d & \\ & & & R_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_s \\ i_f \\ i_d \\ i_q \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \left\{ \begin{pmatrix} (L_{ss}) + (L_s) & (L_{sf}) & (L_{sd}) & (L_{sq}) \\ (L_{sf})^T & L_{ff} & L_{fd} & 0 \\ (L_{sd})^T & L_{fd} & L_{dd} & 0 \\ (L_{sq})^T & 0 & 0 & L_{qq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_s \\ i_f \\ i_d \\ i_q \end{pmatrix} \right\}$$

$$(L_{ss}) = L_{SA} \begin{pmatrix} 1 + \tilde{G}_{sii} & -\frac{1}{2} + \tilde{G}_{sik} & -\frac{1}{2} + \tilde{G}_{sik} \\ -\frac{1}{2} + \tilde{G}_{sik} & 1 + \tilde{G}_{sii} & -\frac{1}{2} + \tilde{G}_{sik} \\ -\frac{1}{2} + \tilde{G}_{sik} & -\frac{1}{2} + \tilde{G}_{sik} & 1 + \tilde{G}_{sii} \end{pmatrix} + L_{SB} \begin{pmatrix} \cos 2\gamma & \cos(2\gamma - \frac{2\pi}{3}) & \cos(2\gamma - \frac{4\pi}{3}) \\ \cos(2\gamma - \frac{2\pi}{3}) & \cos(2\gamma - \frac{4\pi}{3}) & \cos 2\gamma \\ \cos(2\gamma - \frac{4\pi}{3}) & \cos 2\gamma & \cos(2\gamma - \frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix}$$

Extrema der Luftspaltfeldereigeninduktivität eines Statorstroms

(nur 1. Harmonische berücksichtigt):

Max.: $L_{SA} + L_{SB} = \frac{2}{3} L_{hd}$

z.B. Strang S1
 $\gamma = 0$

Min.: $L_{SA} - L_{SB} = \frac{2}{3} L_{hq}$

$\gamma = \pi/2$

$L_{hd} = c_d L_{sh}$, $L_{hq} = c_q L_{sh}$

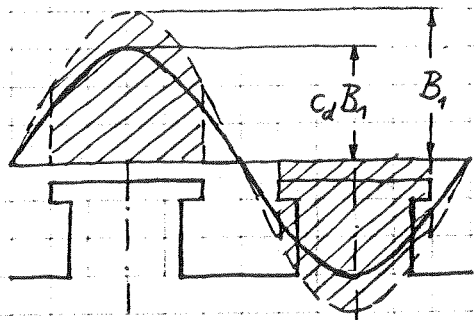
-80-

$$L_{sf} = \frac{3}{2} \frac{4\mu_0 l \tau_p}{\pi^2 p \phi_{min}^2} (w_s \xi_{s1})^2 \quad (\text{vergl. S. 13 u. 18})$$

Feldfaktoren: $C_d < 1$, $C_q < C_d$

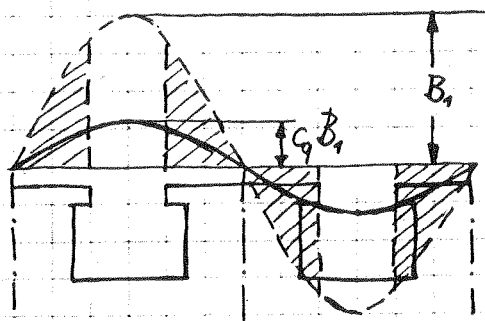
Vollpolmaschine $C_d = C_q = 1$

S1: $\gamma = 0$



$\hat{=} \text{Luftpalt } \frac{\hat{f}_{min}}{C_d}$

S1: $\gamma = \pi/2$



$\hat{=} \text{Luftpalt } \frac{\hat{f}_{min}}{C_q}$

B_1 ist die Amplitude der 1. Harmonischen des Luftpaltfelds unter der Annahme $\hat{f} = \hat{f}_{min} = \text{const}$ für eine bestimmte Statorerregung;

$c_d B_1$ ist die Amplitude der 1. Feldharmonischen bei Längsstellung des realen Polrads und gleicher Statorerregung;

$c_q B_1$ ist die Amplitude der 1. Feldharmonischen bei Querstellung des realen Polrads und gleicher Statorerregung.

$$(L_{sf}) = \frac{2}{3} L_{hd} \frac{1}{\hat{u}_f}$$

$\cos \gamma$
$\cos(\gamma - 2\pi/3)$
$\cos(\gamma - 4\pi/3)$

$$\hat{u}_f = \frac{w_s \xi_{s1}}{n_p \xi_{s1}}$$

$$(L_{SD}) = \frac{2}{3} L_{hd} \frac{1}{i_d}$$

$-\cos \gamma$
$\cos(\gamma - 2\pi/3)$
$\cos(\gamma - 4\pi/3)$

$$i_d = \frac{\omega_s \Phi_m}{\omega_s \Phi_m}$$

$$(L_{SQ}) = \frac{2}{3} L_{hq} \frac{1}{i_q}$$

$\cos(\gamma + \pi/2)$
$\cos(\gamma + \pi/2 - 2\pi/3)$
$\cos(\gamma + \pi/2 - 4\pi/3)$

$$i_q = \frac{\omega_s \Phi_m}{\omega_s \Phi_m}$$

Aus den Beziehungen von S. 79 folgt:

$$\frac{3}{2} L_{SA} = \frac{1}{2} (L_{hd} + L_{hq})$$

$$\frac{3}{2} L_{SB} = \frac{1}{2} (L_{hd} - L_{hq})$$

Extremwerte der Wechselinduktivität zwischen zwei Statorsträngen (Luftspaltfeldinduktivität, mit 1. Harmonische berücksichtigt):

$$\text{z.B. } L_{S1, S2} = -\frac{1}{2} L_{SA} + L_{SB} \cos(2\gamma - 2\pi/3)$$

$$\gamma = \frac{\pi}{3} : L_{S1, S2} = -\frac{1}{2} L_{SA} + L_{SB} = -\frac{1}{6} (3L_{hq} - L_{hd})$$

$$\gamma = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} : L_{S1, S2} = -\frac{1}{2} L_{SA} - L_{SB} = -\frac{1}{6} (3L_{hd} - L_{hq})$$

Die Stern- und Nullfeldinduktivitäten (L_S) werden gemäß S. 13 angesetzt.

Das Drehmoment ist bestimmt durch (vgl. S. 13):

$$M_{ei} = \frac{1}{2} p (i)^T \frac{d(L)}{d\gamma} (i)$$

Durch Einsetzen folgt:

$$M_{ei} = p i_f^T \frac{d(L_{sf})}{d\gamma} (i_s) + \frac{1}{2} p (i_s')^T \frac{d(L_{ss})}{d\gamma} (i_s') + p \left[i_d \frac{d(L_{SD})}{d\gamma} + i_q \frac{d(L_{SQ})}{d\gamma} \right]^T (i_s)$$

Die drei Drehmomentterme unterscheiden sich in ihrer Abhängigkeit von den Strömen!

Das Spannungsgleichungssystem von S. 79 wird gemäß dem Formalismus von S. 14 folgender Transformation unterzogen:

$$\begin{array}{c}
 \begin{pmatrix} u_s \\ u_f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_s & & & \\ & 1/u_f & & \\ & & 1/u_D & \\ & & & 1/u_Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_s' \\ u_f' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \\
 \begin{pmatrix} i_s \\ i_f \\ i_D \\ i_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_s & & & \\ & u_f & & \\ & & u_D & \\ & & & u_Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_s' \\ i_f' \\ i_D' \\ i_Q' \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Diese Transformation führt nur dann zu einer winkelunabhängigen Induktivitätsmatrix (L), wenn die Bezugsachse mit dem magnetisch unsymmetrischen Maschinenteil, dem Rotor, verbunden wird:

$$y_R = 0 \quad \leadsto \quad y_S = -y' \quad , \quad (C_s) \text{ nach S. 17} .$$

Transformiertes Spannungsgleichungssystem:

$$\begin{array}{c}
 \begin{pmatrix} u_{s1} \\ u_{s1}^* \\ u_{s0} \\ u_f' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_s & & & & & \\ & R_s & & & & \\ & & R_s & & & \\ & & & R_f' & & \\ & & & & R_D' & \\ & & & & & R_Q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{s1} \\ i_{s1}^* \\ i_{s0} \\ i_f' \\ i_D' \\ i_Q' \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} j & & & & & \\ & -j & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{s1} \\ \psi_{s1}^* \\ \psi_{s0} \\ \psi_f' \\ \psi_D' \\ \psi_Q' \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \psi_{s1} \\ \psi_{s1}^* \\ \psi_{s0} \\ \psi_f' \\ \psi_D' \\ \psi_Q' \end{pmatrix}
 \end{array}$$

$\underline{\psi}_{s1}$	$\frac{3}{2}L_{SA}+L_{SB}$	$-\frac{3}{2}L_{SB}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}L_{hd}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}L_{hd}$	$\frac{j}{\sqrt{3}}L_{hq}$	$\underline{i}'_{s1}$
$\underline{\psi}_{s1}^*$	$\frac{3}{2}L_{SB}$	$\frac{3}{2}L_{SA}+L_{SB}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}L_{hd}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}L_{hd}$	$-\frac{j}{\sqrt{3}}L_{hq}$	$\underline{i}_{s1}^*$
$\underline{\psi}_{s0}$			L_{S0}				$\underline{i}_{s0}$
$\underline{\psi}'_f$	$\frac{1}{\sqrt{3}}L_{hd}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}L_{hd}$		L'_{ff}	L'_{fd}		$\underline{i}'_f$
$\underline{\psi}'_d$	$\frac{1}{\sqrt{3}}L_{hd}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}L_{hd}$		L'_{fd}	L'_{dd}		$\underline{i}'_d$
$\underline{\psi}'_q$	$-\frac{j}{\sqrt{3}}L_{hq}$	$\frac{j}{\sqrt{3}}L_{hq}$				L'_{qq}	$\underline{i}'_q$

$$R_f' = \hat{u}_f^2 R_f, \quad R_d' = \hat{u}_d^2 R_d, \quad R_q' = \hat{u}_q^2 R_q$$

$$L'_{ff} = \hat{u}_f^2 L_{ff}, \quad L'_{dd} = \hat{u}_d^2 L_{dd}, \quad L'_{qq} = \hat{u}_q^2 L_{qq}$$

$$L'_{fd} = \hat{u}_f \hat{u}_d L_{fd}$$

L_{SB} und L_{S0} sind definiert wie bei der Asynchronmaschine (an Stelle von L_S steht L_{SA} , vgl. S. 17, 18, 20).

In den Statorvariablen tritt wieder der Rotorzeiger und die Nullkomponente auf.

Das innere Drehmoment wird nach S. 15:

$$M_{i1} = \frac{p}{f} \operatorname{Re} \{ (\underline{i})^{*T} (\underline{F})(\underline{\psi}) \}$$

$$M_{i1} = 2p \operatorname{Im} \{ \underline{i}_{s1} \underline{\psi}_{s1}^* \}$$

Durch Einsetzen von $\underline{\psi}_{s1}$ und Ersetzen von L_{SA} und L_{SB} nach S. 81 folgt:

$$M_{i1} = \frac{2p}{\sqrt{3}} \operatorname{Im} \left\{ L_{hd} \hat{i}_f'' \hat{i}_{s1} + \frac{\sqrt{3}}{2} (L_{hd} - L_{hq}) \hat{i}_{s1}^2 + (L_{hd} \hat{i}_d' - j L_{hq} \hat{i}_q') \hat{i}_{s1}' \right\}$$

1. Term: synchrones Anteroment, vom Polrad- und Statorfeld erzeugt
2. Term: Reaktionsmoment, vom Statorfeld allein erzeugt; tritt nur auf, wenn $L_{hd} \neq L_{hq}$, und ermöglicht den Bau von Reaktions- od. Reluktanzmaschinen

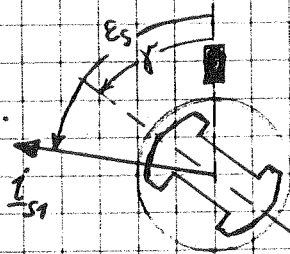
3. Totm: asynchrones oder Dämpfungsmoment, vom Statorsch-
feld und dem Feld der Dämpferströme erzeugt; tritt
im stationären symmetrischen Betrieb mit sinus-
förmigen Größen nicht auf, da $i'_d = 0$, $i'_q = 0$ ist.

Bei welcher Lage des Statorstromraumzeigers wird das
synchrone Moment bzw. das Reaktionsmoment maximal?

Annahme: $i_{s1} = \frac{1}{\sqrt{2}} i_s e^{j(\varepsilon_s + \gamma_s')}$

$$i_{s1} = \frac{1}{\sqrt{2}} i_s e^{j(\varepsilon_s - \gamma)}$$

$$i'_f = \text{const}, \quad i_s = \text{const}$$

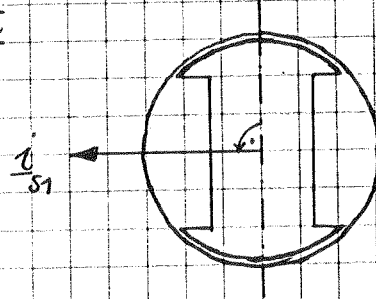


a) synchrones Moment

$$\text{Im} \{ i'_f i_s e^{j(\varepsilon_s - \gamma)} \} \stackrel{!}{=} \text{Maximum}$$

$$\leadsto \varepsilon_s - \gamma = \frac{\pi}{2}$$

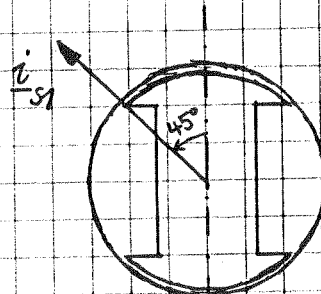
γ messen



b) Reaktionsmoment

$$\text{Im} \{ i_s^2 e^{j2(\varepsilon_s - \gamma)} \} \stackrel{!}{=} \text{Maximum}$$

$$\leadsto \varepsilon_s - \gamma = \frac{\pi}{4}$$



Stationärer Betrieb:

$$\varepsilon_s = \omega_s t + \varepsilon_{s0}$$

$$\gamma = \omega_s t + \gamma_0$$

$$\varepsilon_s - \gamma = \varepsilon_{s0} - \gamma_0$$

Sonderfall des stationären Betriebs am starren symmetrischen Netz:

$$\dot{\gamma} = \omega_s = \text{const} \quad , \quad \gamma = \omega_s t + \gamma_0$$

Statorspannungssystem gegeben nach S. 19,

$$\text{mit } \gamma_s' = -\gamma \text{ wird der Raumvektor } \underline{u}_{s1} = \sqrt{\frac{3}{2}} U_s e^{-j\gamma_0}$$

$$u_{s0} = 0$$

$$u_f = U_f = \text{const}$$

Unter diesen Bedingungen sind die stationären Lösungen des Systems von S. 82, 83 zeitlich konstant:

$$\text{Ansatz: } \underline{i}_{s1}' = \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{I}_s e^{-j\gamma_0} \quad , \quad \underline{I}_s = I_s e^{-j\gamma}$$

$$i_f' = u_f' / R_f' \quad \text{oder} \quad I_f = U_f / R_f \quad , \quad i_{s0}' = 0$$

$$i_D' = 0 = i_D \quad , \quad i_Q' = 0 = i_Q$$

Die 1. Gleichung lautet dann:

$$U_s e^{-j\gamma_0} = R_s \underline{I}_s e^{-j\gamma_0} + j\omega_s \left[\frac{1}{2} (L_{hd} + L_{hq}) + L_{\sigma} \right] \underline{I}_s e^{-j\gamma_0} +$$

$$j\omega_s \frac{1}{2} (L_{hd} - L_{hq}) \underline{I}_s^* e^{j\gamma_0} + j\omega_s \frac{\sqrt{2}}{3} L_{hd} i_f'$$

Definiert man als Polradwinkel den Phasenwinkel zwischen der vom Polrad induzierten Polradspannung und der Strangspannung,

$$\gamma_0 + \pi/2 = \vartheta \quad , \quad \underline{u}_{s1} = j \sqrt{\frac{3}{2}} U_s e^{-j\vartheta}$$

dann erhält die stationäre Spannungsgleichung die Form:

$$\underline{U}_s = R_s \underline{I}_s + j \frac{1}{2} (X_d + X_q) \underline{I}_s - j \frac{1}{2} (X_d - X_q) \underline{I}_s^* e^{j2\vartheta} + \frac{\sqrt{2}}{3} X_{hd} \underline{i}_f' e^{j\vartheta}$$

$$X_d = X_{hd} + X_{ss} \quad , \quad X_q = X_{hq} + X_{ss}$$

Die Rücktransformation des Statorstroms liefert nach S. 82:

$$\begin{bmatrix} i_{s1}' \\ i_{s2}' \\ i_{s3}' \end{bmatrix} = \sqrt{2} \operatorname{Re} \begin{bmatrix} \underline{I}_s e^{j\omega_s t} \\ \underline{a}^2 \underline{I}_s e^{j\omega_s t} \\ \underline{a} \underline{I}_s e^{j\omega_s t} \end{bmatrix}$$

Die Momentenformel von S. 83 ergibt für den stationären

Betrieb:

$$M_{i1} = 3p \operatorname{Im} \left\{ j \frac{\sqrt{2}}{3} L_{hd} i_f' \underline{I}_s e^{-j\vartheta} - \frac{1}{2} (L_{hd} - L_{hq}) \underline{I}_s^2 e^{-j2\vartheta} \right\}$$

Hier treten nur das synchrone und das Reaktionsmoment auf.

Ersetzt man unter der Annahme $R_s = 0$ in der

Momentenbeziehung S. 83 $\frac{\psi_{s1}^*}{-j\omega_s}$ aus der Spannungsgleichung S. 82

durch $\frac{\underline{U}_s}{-j\omega_s}$, dann erhält man die bekannte Formel (Herleitung S. 87):

$$M_{i1} = - \frac{3p}{\omega_s} \left[\frac{\frac{\sqrt{2}}{3} X_{hd} i_f'}{X_d} U_s \sin \vartheta + \frac{X_d - X_q}{2 X_q X_d} U_s^2 \sin 2\vartheta \right]$$

mit dem Betrag der Polradspannung $U_p = \frac{\sqrt{2}}{3} X_{hd} i_f'$

Das folgende unter der Annahme $R_s = 0$ gezeichnete Zeiger-

diagramm gilt für übererregten Generatorbetrieb. Es zeigt

außerdem die Möglichkeiten des Vierquadrantenbetriebs einer

am starren Netz betriebenen Synchronmaschine. Die Lage

des Stromzeigers $\underline{I}_s$ bestimmt die Betriebsart:

$$M_{in} = 2p \operatorname{Im} \left\{ \underline{i}_{s1} \underline{\Psi}_{s1}^* \right\}$$

stationärer Betrieb:

$$R_s = 0: \quad \underline{u}_{s1}^* = -j\omega_s \underline{\Psi}_{s1}^*$$

$$M_{in} = \frac{2p}{\omega_s} \operatorname{Im} \left\{ j \underline{i}_{s1} \underline{u}_{s1}^* \right\}$$

$$\underline{u}_{s1} = j \frac{\sqrt{3}}{2} U_s e^{-j\vartheta} = \frac{\sqrt{3}}{2} U_s (\sin \vartheta + j \cos \vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2}} (u_d + j u_q)$$

$$\underline{i}_{s1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(- \frac{\frac{\sqrt{2}}{3} X_{hd} i_f' - U_s \cos \vartheta}{X_d} + j \frac{-U_s \sin \vartheta}{X_q} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (i_d + j i_q)$$

$$M_{in} = \frac{2p}{\omega_s} \operatorname{Im} \left\{ j \frac{1}{\sqrt{2}} (i_d + j i_q) \frac{1}{\sqrt{2}} (u_d - j u_q) \right\}$$

$$M_{in} = \frac{p}{\omega_s} (i_d u_d + i_q u_q)$$

$$M_{in} = \frac{p}{\omega_s} \left(- \frac{\frac{\sqrt{2}}{3} X_{hd} i_f' - U_s \cos \vartheta}{X_d} U_s \sin \vartheta + \frac{-U_s \sin \vartheta}{X_q} U_s \cos \vartheta \right)$$

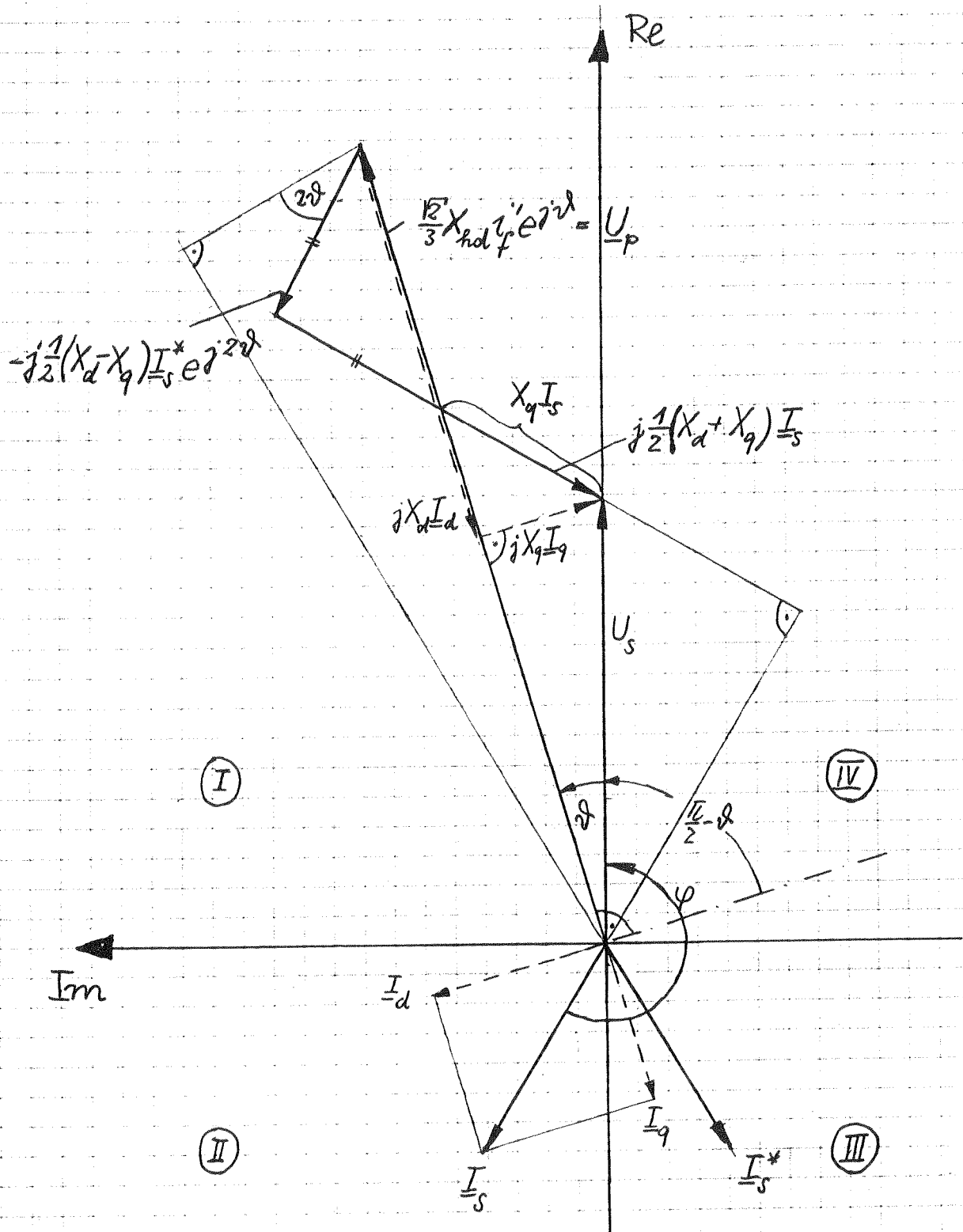
$$M_{in} = - \frac{3p}{\omega_s} \left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{3} X_{hd} i_f' U_s \sin \vartheta}{X_d} + \frac{X_d - X_q}{2 X_d X_q} U_s^2 \sin 2\vartheta \right)$$

Zur Bestimmung der Rammzeiger $\underline{u}_{s1}$, $\underline{i}_{s1}$

wurde das Zeigerdiagramm herangezogen, wobei

die hierfür gültige reelle Achse unter dem Winkel $-(\frac{\pi}{2} - \vartheta)$ liegt.

- ① Motor, übererregt, $P_s > 0$, $Q_s < 0$
- ② Generator, übererregt, $P_s < 0$, $Q_s < 0$
- ③ Generator, untererregt, $P_s < 0$, $Q_s > 0$
- ④ Motor, untererregt, $P_s > 0$, $Q_s > 0$



Wirkleistung:

$$P_S = 2 \cdot \operatorname{Re}\{i_{s1}^* u_{s1}\} = 3 U_S I_S \cos \varphi$$

Blindleistung:

$$Q_S = 2 \operatorname{Im}\{i_{s1}^* u_{s1}\} = 3 U_S I_S \sin \varphi$$

($Q_S < 0$ bedeutet Abgabe, $Q_S > 0$ Aufnahme induktiver Blindleistung.)

Das komplexe Spannungsgleichungssystem von S. 82, 83 wird durch folgende zeitinvariante Transformation in ein reelles überführt:

$$\begin{pmatrix} \underline{u}_s \\ u_f' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (K) & & & \\ & \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{u_{fd}} & & \\ & & \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{u_{fd}} & \\ & & & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_s \\ u_f'' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \underline{i}_s \\ i_f' \\ i_d' \\ i_q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (K) & & & \\ & \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{u_{fd}} & & \\ & & \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{u_{fd}} & \\ & & & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{i}_s \\ i_f'' \\ i_d'' \\ i_q'' \end{pmatrix}$$

mit

$$(K) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & j & 0 \\ 1 & -j & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad (K)^{-1} = (K)^{*T}$$

$$u_{fd}'' = \frac{2}{3} \frac{L_{hd}}{L'_{fd}} \leq 1$$

Es ergeben sich folgende neue Statorvariable:

$$\begin{pmatrix} \underline{u}_s \\ u_{so} \end{pmatrix} = (K)^{*T} \begin{pmatrix} \underline{u}_s \\ u_f'' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \operatorname{Re}\{u_{s1}\} \\ \sqrt{2} \operatorname{Im}\{u_{s1}\} \\ u_{so} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_d \\ u_q \\ u_{so} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \underline{i}_s \\ i_{so} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_{so} \end{pmatrix}$$

Das neue Spannungsgleichungssystem ist dann:

$$\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \\ u_{s0} \\ u_f'' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & & & & & \\ & R_s & & & & \\ & & R_s & & & \\ & & & R_f' & & \\ & & & & R_D'' & \\ & & & & & R_Q' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_{s0} \\ i_f'' \\ i_D'' \\ i_Q'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -j\psi_q \\ j\psi_d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\psi}_d \\ \dot{\psi}_q \\ \dot{\psi}_{s0} \\ \dot{\psi}_f'' \\ \dot{\psi}_D'' \\ \dot{\psi}_Q'' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_q \\ \psi_{s0} \\ \psi_f'' \\ \psi_D'' \\ \psi_Q'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_d & & & L_{hd}' & L_{hd}' & \\ & L_q & & & & L_{hq} \\ & & L_{s0} & & & \\ L_{hd}' & & & L_{ff}'' & L_{hd}' & \\ L_{hd}' & & & L_{hd}' & L_{dd}'' & \\ & L_{hq} & & & & L_{qq}'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_{s0} \\ i_f'' \\ i_D'' \\ i_Q'' \end{bmatrix}$$

Durch diese Transformation sind die df-, dD- und fD-Wechselinduktivitäten gleich geworden.

$$R_f'' = \frac{3}{2} \dot{u}_{fd}^2 R_f' \quad , \quad R_D' = \frac{3}{2} \dot{u}_{fd}^2 R_D' \quad , \quad R_Q'' = \frac{3}{2} R_Q'$$

$$L_{ff}'' = \frac{3}{2} \dot{u}_{fd}^2 L_{ff}' \quad , \quad L_{dd}'' = \frac{3}{2} \dot{u}_{fd}^2 L_{dd}' \quad , \quad L_{qq}'' = \frac{3}{2} L_{qq}'$$

$$L_{hd}' = \frac{3}{2} \dot{u}_{fd}^2 L_{fd}' = \frac{2}{3} \frac{L_{hd}^2}{L_{fd}'} = \dot{u}_{fd} L_{hd} \leq L_{hd}$$

$$L_d = L_{hd} + L_{s0} \quad , \quad L_q = L_{hq} + L_{s0}$$

$$L_d = L_{hd}' + L_{s0}' \quad , \quad L_{s0}' > L_{s0}$$

Die Beziehung für das innere Drehmoment von S. 83 führt mit den neuen Variablen zu:

$$M_{i1} = p [L_{hd}' i_f'' i_q + (L_d - L_q) i_d i_q + (L_{hd}' i_D'' i_q - L_{hq} i_Q'' i_d)]$$

Auch hier kann man die drei Terme gemäß S. 83, 84 unterscheiden.

Nach S. 83 kann man auch folgende häufig benutzte Drehmomentformel herleiten (vergl. S. 23!):

$$M_{i1} = 2p \operatorname{Im} \left\{ \underline{i}_{s1} \underline{\psi}_{s1}^* \right\}$$

$$M_{i1} = 2p \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (i_d' + j i_q') \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_d - j \psi_q) \right\}$$

$$M_{i1} = p (\psi_d i_q' - \psi_q i_d').$$

Zusammenfassung der Transformationen von S. 82 und S. 89:

$$(\underline{u}_s) = (C_s)(\underline{u}_s) = (C_s)(K)(\underline{\bar{u}}_s)$$

$$(\underline{\bar{u}}_s) = [(C_s)(K)]^{*T}(\underline{u}_s)$$

Für die Statorströme gelten die gleichen Beziehungen.

Mit (C_s) nach S. 17 für $\gamma_s' = -\gamma$ und (K) nach S. 89 folgt:

$$(C_s)(K) = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cos \gamma & -\sin \gamma & 1/\sqrt{2} \\ \hline \cos(\gamma - 2\pi/3) & -\sin(\gamma - 2\pi/3) & 1/\sqrt{2} \\ \hline \cos(\gamma - 4\pi/3) & -\sin(\gamma - 4\pi/3) & 1/\sqrt{2} \\ \hline \end{array}$$

Die Matrix ist reell und damit orthogonal.

Sonderfall eines starren symmetrischen sinusförmigen Statorspannungssystems nach S. 19 ergibt:

$$\begin{array}{|c|} \hline u_d \\ \hline u_q \\ \hline u_{s0} \\ \hline \end{array} = \sqrt{3} U_s \begin{array}{|c|} \hline \cos(\omega_s t - \gamma) \\ \hline \sin(\omega_s t - \gamma) \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

Die Definition des Polradwinkels ϑ (vergl. S. 85) durch

$$\vartheta = \omega_s t + \vartheta(t) - \pi/2$$

führt zu

$$\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \\ u_{s0} \end{bmatrix} = \sqrt{3} U_s \begin{bmatrix} \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \\ 0 \end{bmatrix}$$

oder

$$\underline{u}_{s1} = j \sqrt{\frac{3}{2}} U_s e^{-j\vartheta}$$

Inversion der Induktivitätsmatrix von S. 90 unter der Annahme, daß keine Nullkomponenten auftreten (3. Gl. entfällt):

da die 2. und 6. Gl. von den übrigen entkoppelt sind, können sie separat behandelt werden.

Definition von Streuziffern:

$$L_d = (1 + \tilde{\sigma}_d) L'_{hd}$$

$$L''_{ff} = (1 + \tilde{\sigma}_f) L'_{hd}$$

$$L''_{dd} = (1 + \tilde{\sigma}_d) L'_{hd}$$

$$L_g = (1 + \tilde{\sigma}_g) L_{hg}$$

$$L''_{QQ} = (1 + \tilde{\sigma}_Q) L_{hg}$$

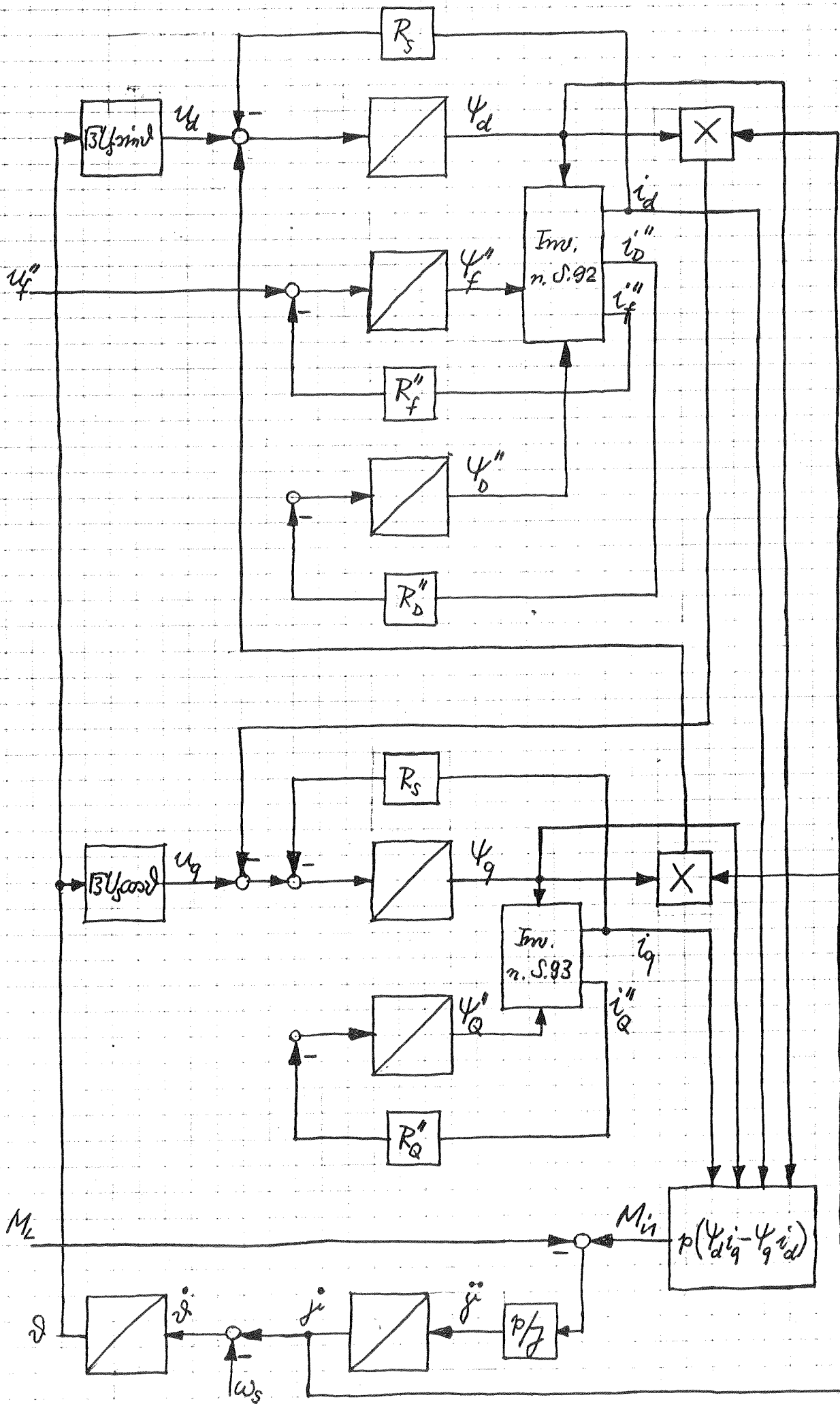
$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_f'' \\ i_D'' \end{bmatrix} = \frac{1}{\tilde{\sigma}_{dfD} L'_{hd}} \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_f + \tilde{\sigma}_D + \tilde{\sigma}_f \tilde{\sigma}_D & -\tilde{\sigma}_D & -\tilde{\sigma}_f \\ -\tilde{\sigma}_D & \tilde{\sigma}_d + \tilde{\sigma}_D + \tilde{\sigma}_d \tilde{\sigma}_D & -\tilde{\sigma}_d \\ -\tilde{\sigma}_f & -\tilde{\sigma}_d & \tilde{\sigma}_d + \tilde{\sigma}_f + \tilde{\sigma}_d \tilde{\sigma}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_f'' \\ \psi_D'' \end{bmatrix}$$

mit $\tilde{\sigma}_{dfD} = \tilde{\sigma}_d \tilde{\sigma}_f + \tilde{\sigma}_d \tilde{\sigma}_D + \tilde{\sigma}_f \tilde{\sigma}_D + \tilde{\sigma}_d \tilde{\sigma}_f \tilde{\sigma}_D$

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_q \\ \dot{i}_q'' \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma_{qQ} L_{hq}} \begin{bmatrix} 1+\tilde{\sigma}_Q & -1 \\ -1 & 1+\tilde{\sigma}_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_q \\ \psi_q'' \end{bmatrix}$$

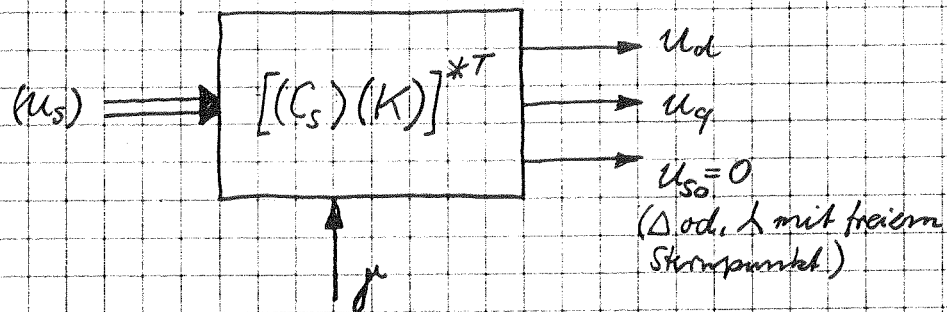
$$\text{mit } \tilde{\sigma}_{qQ} = \sigma_q + \sigma_Q + \sigma_q \sigma_Q$$

S. 94 zeigt ein Strukturbild der am starren Netz arbeitenden Drehstromsynchronmaschine; Erregerspannung und Lastmoment sind die einzigen Eingangsgrößen. Da in dieser realen Struktur 7 Integratoren enthalten sind, handelt es sich um ein (nichtlineares) System 7. Ordnung; also gegenüber der Asynchronmaschine eine um zwei höhere Ordnung. Die Gründe dafür sind, daß bei der Synchronmaschine die Erregerrückführung berücksichtigt wird und der Rotorpositionswinkel (od. Polradwinkel) das Verhalten bestimmt, während bei der Asynchronmaschine nur $\dot{\theta}$ eine Rolle spielt (vergl. S. 42). Bevor die Simulation gestartet wird, müssen für das zu behandelnde Problem die Eingangsgrößen und die Anfangswerte für sämtliche Integrationen bekannt sein.



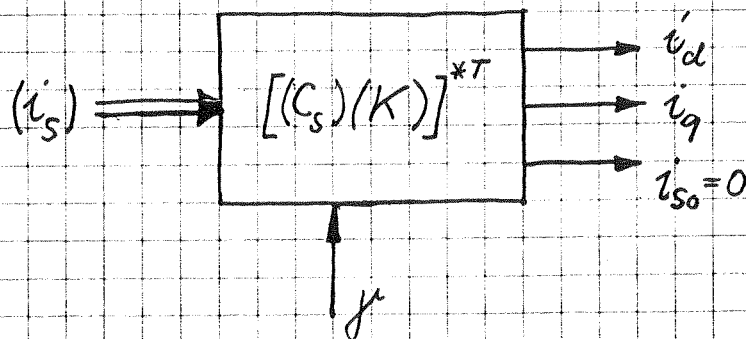
Synchronmaschine im Einzelbetrieb (z.B. Stromrichterspeisung):

a) Spannungspeisung



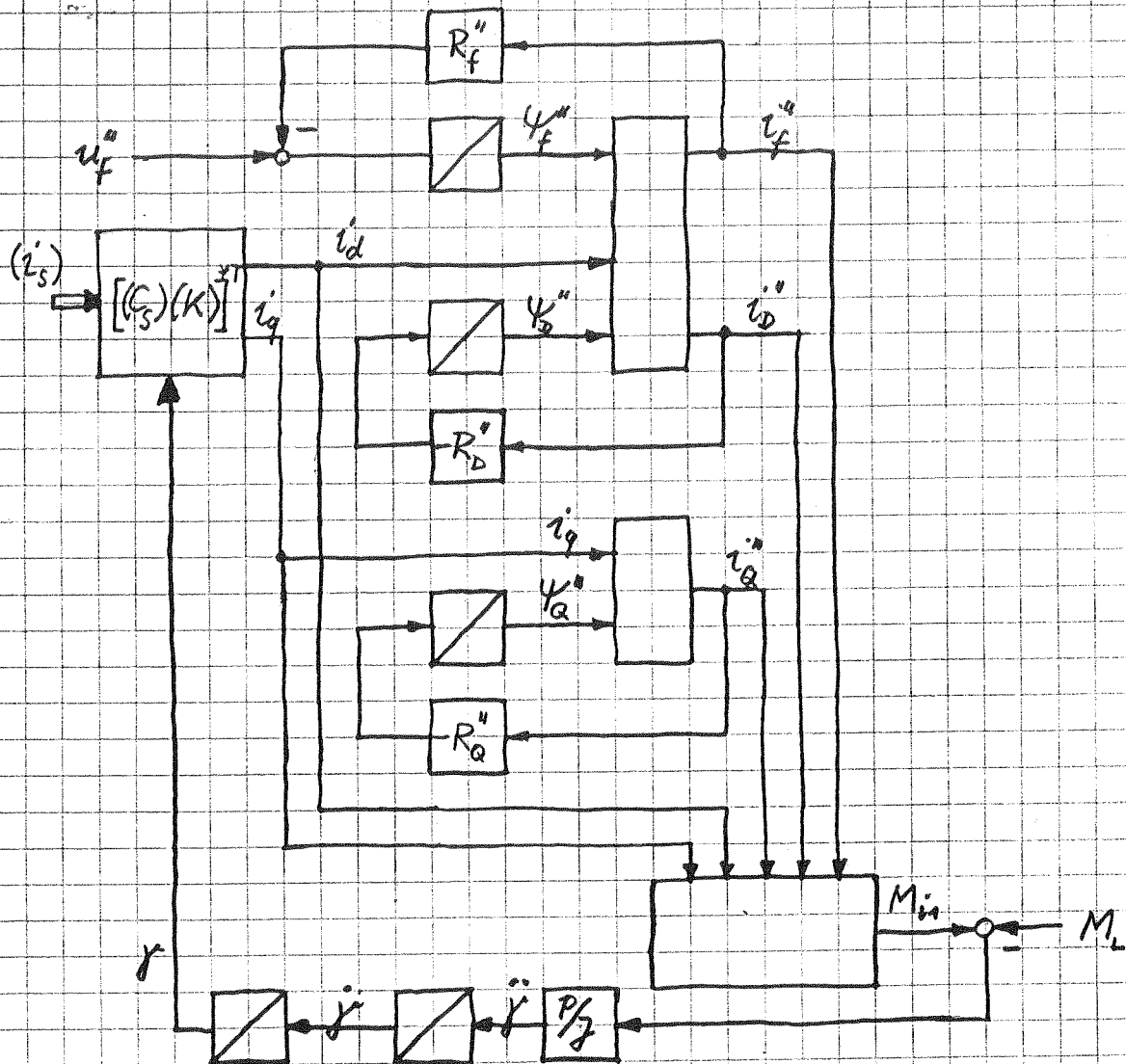
System 7. Ordnung

b) Stromspeisung

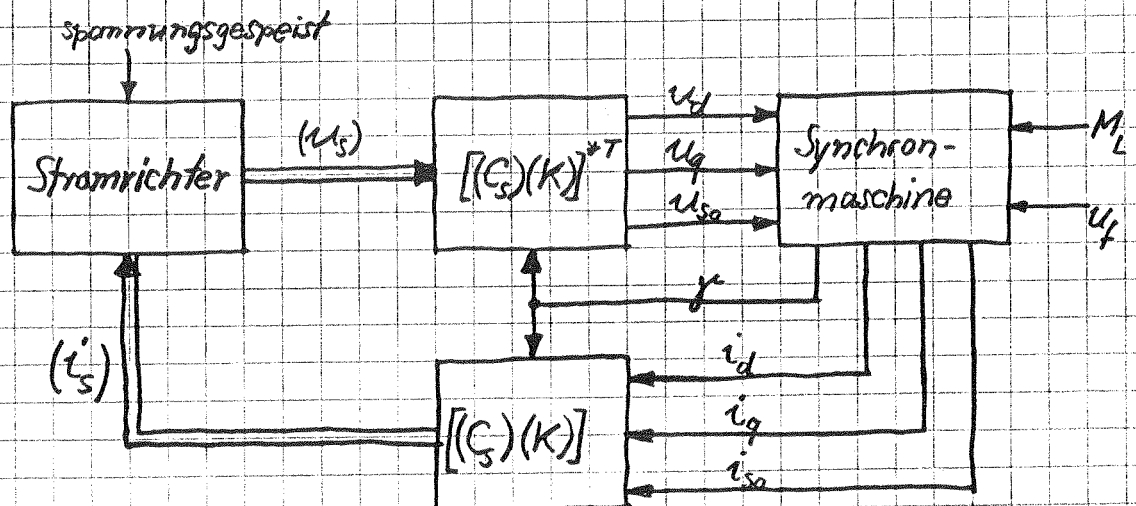


System 5. Ordnung

Synchronmaschine stramgespeist ($i_{s0} = 0$):



Synchronmaschine von einem maschinengeführten Stromrichter gespeist:



9. Permanentmagnetenerregte Synchronmaschine ohne Dämpferwicklung

($L'_{hd} = L_{hd}$):

$i_f'' = \text{const} > 0$

$u_d = R_s i_d - j \psi_q + \dot{\psi}_d$

$\psi_d = L_d i_d + L_{hd} i_f''$

$u_q = R_s i_q + j \psi_d + \dot{\psi}_q$

$\psi_q = L_q i_q$

$M_{in} = p L_{hd} i_f'' i_q + p (L_d - L_q) i_d i_q$

$i_q = i_{q0} > 0, i_d = 0 \leadsto M_{in} = M_0 = p L_{hd} i_f'' i_{q0}$

optimale Steuerung bei vorgegebenem Drehmoment:

$i_s = \sqrt{i_d^2 + i_q^2} \stackrel{!}{=} \text{Minimum}$

$\frac{M_{in}}{M_0} = \frac{i_q}{i_{q0}} + \left(1 - \frac{L_{hq}}{L_{hd}}\right) \frac{i_{q0}}{i_f''} \frac{i_d}{i_{q0}} \frac{i_q}{i_{q0}}$

$\frac{i_d}{i_{q0}} = \frac{1}{1 - \frac{L_{hq}}{L_{hd}}} \frac{i_f''}{i_{q0}} \left[\frac{M_{in}}{M_0} \frac{1}{i_q/i_{q0}} - 1 \right]$

$\left(\frac{i_s}{i_{q0}}\right)^2 = \left(\frac{i_d}{i_{q0}}\right)^2 + \left(\frac{i_q}{i_{q0}}\right)^2$

$\frac{1}{1 - \frac{L_{hq}}{L_{hd}}} \frac{i_f''}{i_{q0}} = \alpha$

$\left(\frac{i_s}{i_{q0}}\right)^2 = \alpha^2 \left(\frac{M_{in}}{M_0}\right)^2 \frac{1}{(i_q/i_{q0})^2} - 2\alpha^2 \frac{M_{in}}{M_0} \frac{1}{i_q/i_{q0}} + \alpha^2 + \left(\frac{i_q}{i_{q0}}\right)^2$

$\left(\frac{i_s}{i_{q0}}\right)^2 = y, \frac{i_q}{i_{q0}} = x, \frac{M_{in}}{M_0} = m$

$y = \alpha^2 m^2 \frac{1}{x^2} - 2\alpha^2 m \frac{1}{x} + \alpha^2 + x^2$

$y' = -2\alpha^2 m^2 \frac{1}{x^3} + 2\alpha^2 m \frac{1}{x^2} + 2x \stackrel{!}{=} 0$

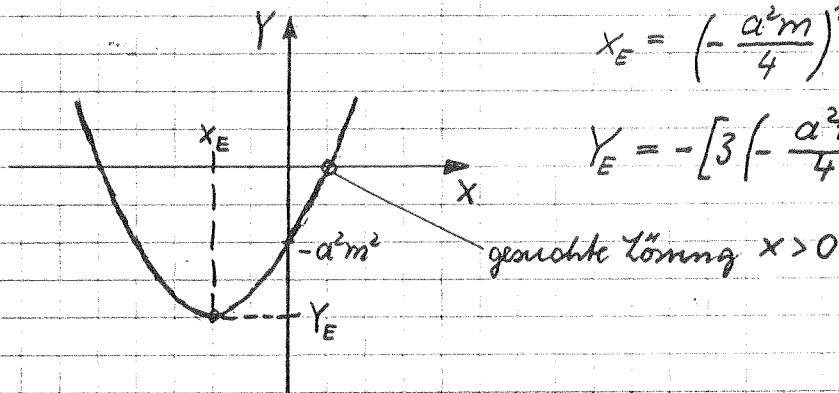
$Y = x^4 + \alpha^2 m x - \alpha^2 m^2 \stackrel{!}{=} 0$

$x=0 \leadsto Y = -\alpha^2 m^2$

Extrema: $Y' = 4x^3 + a^2 m \stackrel{!}{=} 0$

$$x_E = \left(-\frac{a^2 m}{4}\right)^{1/3}$$

$$Y_E = -\left[3\left(-\frac{a^2 m}{4}\right)^{4/3} + a^2 m^2\right]$$



Beispiel 1: Eingelassene Flachmagnete

$$\frac{L_{hg}}{L_{hd}} = 2, \quad \frac{i_f''}{i_{q0}} = 1,5, \quad \frac{M_{i1}}{M_0} = m = 1 \rightarrow a = -1,5$$

$$x^4 + 2,25(x-1) = 0 \rightarrow x = \frac{i_q}{i_{q0}} = 0,81$$

$$\frac{i_d}{i_{q0}} = a \left(\frac{m}{x} - 1\right) = -0,35, \quad \frac{i_s}{i_{q0}} = 0,88$$

Beispiel 2: Sammlermagnete

$$\frac{L_{hg}}{L_{hd}} = 0,5, \quad \frac{i_f''}{i_{q0}} = 1,5, \quad \frac{M_{i1}}{M_0} = m = 1 \rightarrow a = 3$$

$$x^4 + 9(x-1) = 0 \rightarrow x = \frac{i_q}{i_{q0}} = 0,92$$

$$\frac{i_d}{i_{q0}} = 0,26, \quad \frac{i_s}{i_{q0}} = 0,956$$

Stationärer Zustand: Motorbetrieb

$$\frac{u_d}{\omega_{sn} L_{hd} i_f''} = \frac{R_s}{\omega_{sn} L_{hd} i_f''} \frac{i_{q0}}{i_f''} \frac{i_d}{i_{q0}} - \frac{j}{\omega_{sn} L_{hd} i_f''} \frac{i_{q0}}{i_f''} \frac{i_q}{i_{q0}}$$

$$\frac{u_q}{\omega_{sn} L_{hd} i_f''} = \frac{R_s}{\omega_{sn} L_{hd} i_f''} \frac{i_{q0}}{i_f''} \frac{i_q}{i_{q0}} + \frac{j}{\omega_{sn} L_{hd} i_f''} \left(\frac{L_d}{i_f''} \frac{i_{q0}}{i_f''} \frac{i_d}{i_{q0}} + 1 \right)$$

$$j = \omega_{sn}, \quad M_{i1} = M_0, \quad \frac{R_s}{\omega_{sn} L_{hd}} \approx 0,1, \quad L_{hd} \approx L_d, \quad L_{hg} \approx L_q$$

Beispiel 1: $\frac{u_d}{\omega_{sn} L_{hd} i_f''} \approx -1,1; \quad \frac{u_q}{\omega_{sn} L_{hd} i_f''} \approx 0,82; \quad \varphi \approx 30^\circ$
 $\cos \varphi \approx 0,867$

Beispiel 2: $\frac{u_d}{\omega_{sn} L_{hd} i_f''} \approx -0,31; \quad \frac{u_q}{\omega_{sn} L_{hd} i_f''} \approx 1,23; \quad \varphi \approx 30^\circ$
 $\cos \varphi \approx 0,867$

zum Vergleich: $i_d = 0$, $i_q = i_{q0}$, $\dot{y} = \omega_{SN}$, $M_{i1} = M_0$

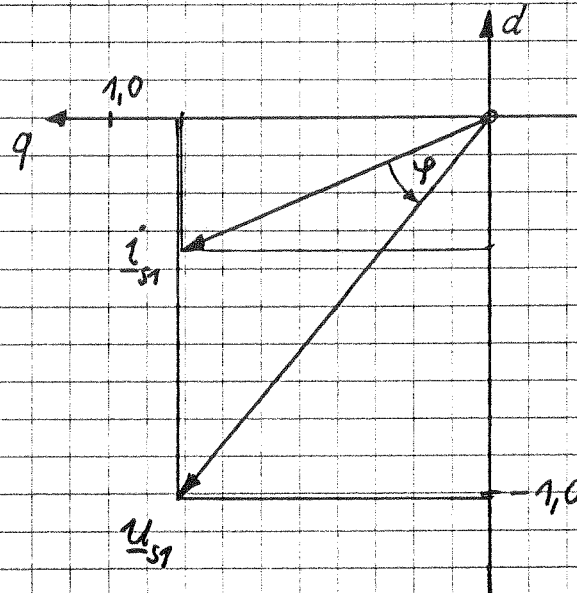
Fall 1:

$$\frac{u_d}{\omega_{SN} L_{hd} i_f''} \approx -1,33; \quad \frac{u_q}{\omega_{SN} L_{hd} i_f''} \approx 1,067; \quad \varphi \approx 57,3^\circ; \quad \cos \varphi \approx 0,626$$

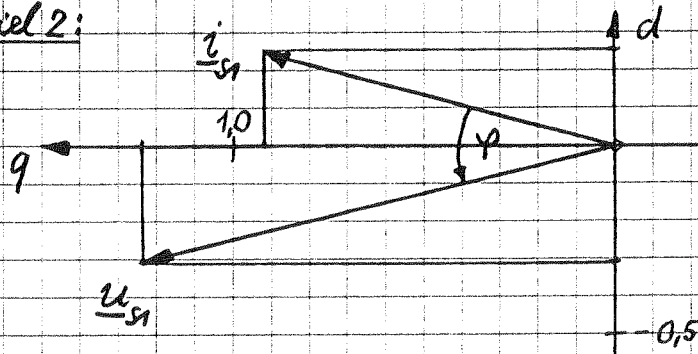
Fall 2:

$$\frac{u_d}{\omega_{SN} L_{hd} i_f''} \approx -0,33; \quad \frac{u_q}{\omega_{SN} L_{hd} i_f''} \approx 1,067; \quad \varphi \approx 17,2^\circ; \quad \cos \varphi \approx 0,955$$

Beispiel 1:

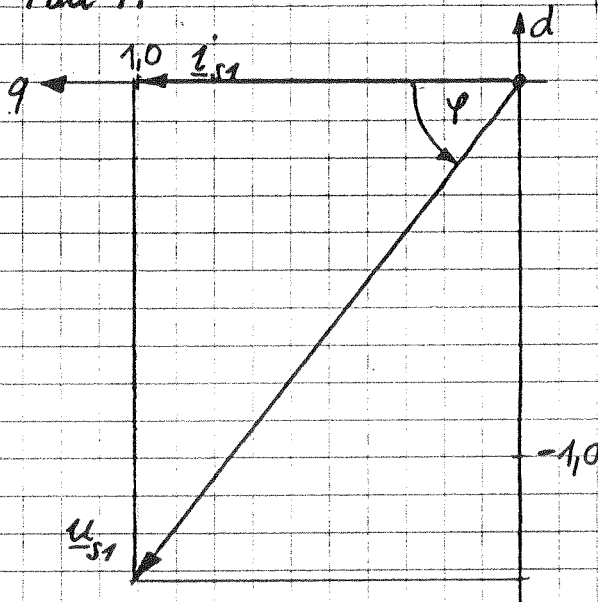


Beispiel 2:

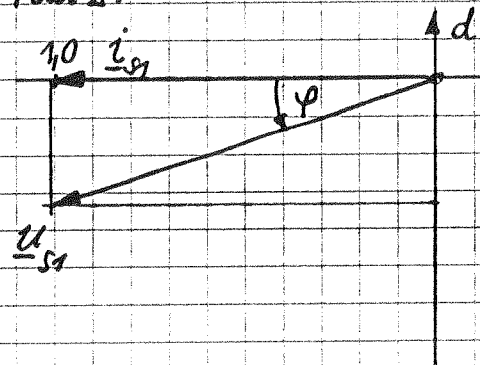


zum Vergleich: $i_d = 0$

Fall 1:



Fall 2:



10. Dreipoliger Stoßkurzschluss der Synchronmaschine:

Für den Fall konstanter Drehzahl erhält man ein lineares zeitinvariantes System, das mittels Laplace-Transformation lösbar ist.

Annahmen: $\dot{\gamma} = \omega_s$, $U_f = \text{const}$

$t < 0$: Leerlauf $U_f = R_f I_f$ oder $U_f = R_f i_{f0}''$;

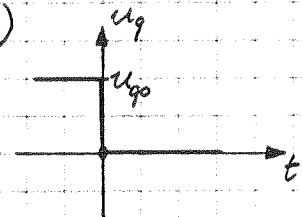
$u_{d0} = 0$, $u_{q0} = \omega_s L'_{hd} i_{f0}''$; $i_{d0} = 0$, $i_{q0} = 0$, $i_{d0}'' = 0$, $i_{q0}'' = 0$

$t > 0$: dreipoliger Kurzschluss $\rightarrow u_d = 0$, $u_q = 0$

(Sternschaltung, keine Nullkomponenten)

Unter diesen Bedingungen und mit

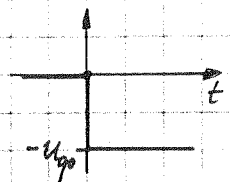
$$i_f'' = i_{f0}'' + \Delta i_f''$$



folgt aus dem Differentialgleichungssystem von S. 90 folgendes algebraische Gleichungssystem:

0	$R_s + sL_d$	$-\omega_s L_q$	sL'_{hd}	sL'_{hd}	$-\omega_s L_{hq}$	$\tilde{i}_d$
$-\frac{1}{s} u_{q0}$	$\omega_s L_d$	$R_s + sL_q$	$\omega_s L'_{hd}$	$\omega_s L'_{hd}$	sL_{hq}	$\tilde{i}_q$
0	sL'_{hd}		$R_f + sL''_{ff}$	sL'_{hd}		$\Delta \tilde{i}_f''$
0	sL'_{hd}		sL'_{hd}	$R'_D + sL''_{D0}$		$\tilde{i}_D''$
0		sL_{hq}			$R'_Q + sL''_{Q0}$	$\tilde{i}_Q''$

Störgröße der 2. Gleichung:



Näherungsbetrachtung für den Fall der Vernachlässigung aller Widerstände führt zu folgenden Lösungen:

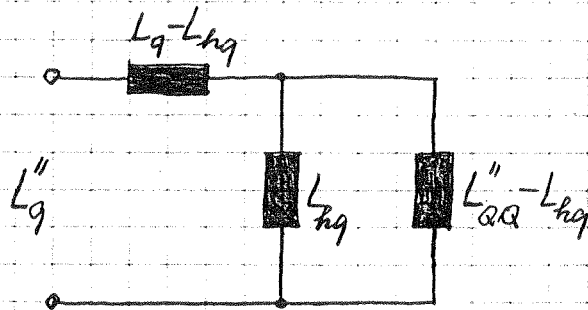
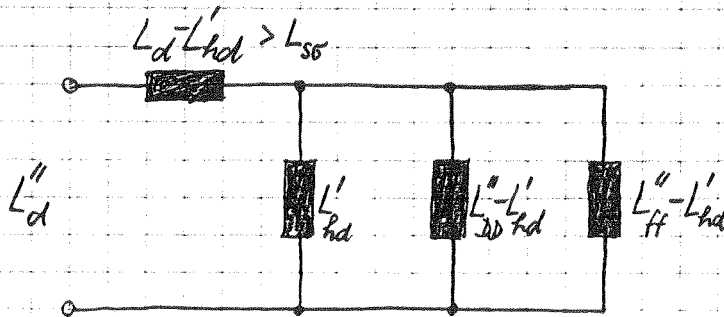
$$\tilde{i}_d = \frac{-\omega_s}{(s^2 + \omega_s^2) L''_d} \frac{1}{s} u_{q0}$$

$$\tilde{i}_q = \frac{-s}{(s^2 + \omega_s^2) L''_q} \frac{1}{s} u_{q0}$$

$$\Delta \tilde{i}_f'' = - \frac{L'_{hd} - L_{hd}^{12}/L''_{dd}}{L''_{ff} - L_{hd}^{12}/L''_{dd}} \tilde{i}_d = - \frac{\sigma_d}{\sigma_f + \sigma_d + \sigma_f' \sigma_d} \tilde{i}_d$$

$$\tilde{i}_d'' = - \frac{L'_{hd}}{L''_{dd}} (\tilde{i}_d + \Delta \tilde{i}_f'') = - \frac{1}{1 + \sigma_d} (\tilde{i}_d + \Delta \tilde{i}_f'')$$

$$\tilde{i}_q'' = - \frac{L_{hq}}{L''_{qq}} \tilde{i}_q = - \frac{1}{1 + \sigma_q} \tilde{i}_q$$



$$L''_d = L_d - \frac{L_{hd}^{12}}{L''_{dd}} - \frac{(L'_{hd} - L_{hd}^{12}/L''_{dd})^2}{L''_{ff} - L_{hd}^{12}/L''_{dd}}$$

$$L''_q = L_q - \frac{L_{hq}^2}{L''_{qq}}$$

Rücktransformation der Ströme in den Zeitbereich:

$$\tilde{i}_d = - \frac{u_{q0}}{X''_d} \frac{\omega_s^2}{s(s^2 + \omega_s^2)} = - \frac{u_{q0}}{X''_d} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_s^2} \right)$$

$$i_d = - \frac{u_{q0}}{X''_d} (1 - \cos \omega_s t)$$

$$\tilde{i}_q = - \frac{u_{q0}}{X_q''} \frac{\omega_s}{j^2 + \omega_s^2}$$

$$i_q = - \frac{u_{q0}}{X_q''} \sin \omega_s t$$

Da die Beziehungen S.101 oben auch für die Zeitwerte gelten, sind damit auch die Ströme i_f'' , i_d'' und i_q'' bekannt.

Die Zeitwerte der Strangstromströme folgen dann mit der Transformation nach S.91 mit

$$\mu = \omega_s t + \mu_0$$

zu:

$$\begin{bmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \\ i_{s3} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\omega_s t + \mu_0) & -\sin(\omega_s t + \mu_0) \\ \cos(\omega_s t + \mu_0 - 2\pi/3) & -\sin(\omega_s t + \mu_0 - 2\pi/3) \\ \cos(\omega_s t + \mu_0 - 4\pi/3) & -\sin(\omega_s t + \mu_0 - 4\pi/3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}$$

$$i_{s1} = \sqrt{\frac{2}{3}} u_{q0} \left[-\frac{1}{X_d''} \cos(\omega_s t + \mu_0) (1 - \cos \omega_s t) + \frac{1}{X_q''} \sin(\omega_s t + \mu_0) \sin \omega_s t \right]$$

$$i_{s1} = \sqrt{\frac{2}{3}} u_{q0} \left[-\frac{1}{X_d''} \cos(\omega_s t + \mu_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X_d''} + \frac{1}{X_q''} \right) \cos \mu_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X_d''} - \frac{1}{X_q''} \right) \cos(2\omega_s t + \mu_0) \right]$$

$$i_{s2}: \quad \mu_0 \Rightarrow \mu_0 - 2\pi/3$$

$$i_{s3}: \quad \mu_0 \Rightarrow \mu_0 - 4\pi/3$$

Der Winkel μ_0 bestimmt den Kurzschlußzeitpunkt ($t=0$), wie man an den rücktransformierten Leerlaufspannungen erkennen kann:

$$u_{q0} = \omega_s L_{\text{sd}}' i_{f0}''$$

$$u_{d0} = 0$$

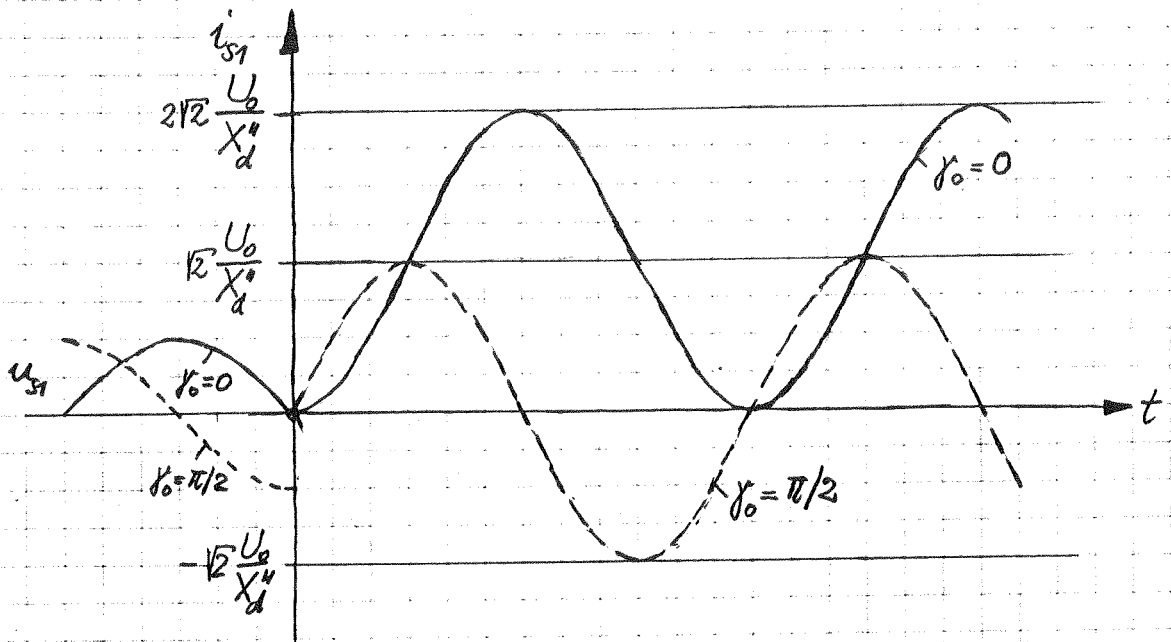
$$\begin{bmatrix} u_{s1} \\ u_{s2} \\ u_{s3} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} -\sin \mu \\ -\sin(\mu - 2\pi/3) \\ -\sin(\mu - 4\pi/3) \end{bmatrix} u_{q0}$$

u_{s1}	$\sin(\omega_s t + \gamma_0)$
u_{s2}	$\sin(\omega_s t + \gamma_0 - 2\pi/3)$
u_{s3}	$\sin(\omega_s t + \gamma_0 - 4\pi/3)$

 $= -\sqrt{2} U_0$ mit $\sqrt{3} U_0 = U_{q0}$

Beispiel: Turbogenerator $X_d'' = X_q''$, $\gamma_0 = 0$

$$i_{s1} = \frac{\sqrt{2} U_0}{X_d''} (1 - \cos \omega_s t)$$



Mit den Zeitwerten der Ströme $i_d, i_q, i_f'', i_D'', i_Q''$ wird nach der Formel von S. 90 das innere Drehmoment berechnet:

$$M_{i1} = p \left\{ L_{hd}' i_q \left[i_{f0}'' - \frac{L_{hd}' - L_{hd}''/L_{D0}''}{L_{ff}'' - L_{hd}''/L_{D0}''} i_d \right] + (L_d - L_q) i_d i_q + \right. \\ \left. L_{hd}' i_q \left[-\frac{L_{hd}'}{L_{D0}''} \left(i_d - \frac{L_{hd}' - L_{hd}''/L_{D0}''}{L_{ff}'' - L_{hd}''/L_{D0}''} i_d \right) \right] - \right. \\ \left. L_{hq} i_d \left[-\frac{L_{hq}}{L_{Q0}''} i_q \right] \right\}$$

$$M_{i1} = -\frac{3p U_0^2}{\omega_s} \left[\frac{1}{X_d''} \sin \omega_s t - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X_d''} - \frac{1}{X_q''} \right) \sin 2\omega_s t \right]$$

$$X_d'' = X_q'' \quad \leadsto \quad |M_{i1}|_{\max} = \frac{3 p U_0^2}{\omega_s X_d''}$$

Mit der bezogenen sog. subtransienten Reaktanz

$$x_d'' = \frac{X_d'' I_{SN}}{U_{SN}},$$

$\omega_s = \omega_N$ und der Annahme einer verlustlosen

Maschine folgt:

$$3 U_{SN} I_{SN} \cos \varphi_N = M_N \frac{\omega_{SN}}{p}$$

$$\frac{|M_{i1}|_{\max}}{M_N} = \frac{(U_0 / U_{SN})^2}{x_d'' \cos \varphi_N}$$

der Maximalwert des Stroms nach §103 (Bild) ist

$$i_{s1\max} = 2\sqrt{2} \cdot \frac{U_0}{X_d''}$$

$$\frac{i_{s1\max}}{I_{SN}} = 2\sqrt{2} \cdot \frac{U_0 / U_{SN}}{x_d''}$$

Bei Turbogeneratoren: $x_d'' = 0,1 \dots 0,25$.

Bei der realen Maschine bewirken die Widerstände, daß die hier berechneten Zeitverläufe auf die stationären Verläufe bzw. Werte des Dauerkurzschlusses abklingen. Dieser Abklingvorgang besteht aus einem schnellen, von der Dämpferwicklung bewirkten (subtransienten) Vorgang und einem nachfolgenden etwas langsameren, von der Erregerwicklung bestimmten (transienten) Vorgang.

Nachrechnung der Statorflüsse für den dreipoligen Stoßstromschluß (Näherung):

$$\psi_d = L_d i_d + L'_{hd} \left(\overbrace{i_f''}^{i_f''} - \frac{\tilde{\sigma}_D}{\tilde{\sigma}_f + \tilde{\sigma}_D + \tilde{\sigma}_f \tilde{\sigma}_D} i_d \right) - L'_{hd} \underbrace{\frac{1}{1+\tilde{\sigma}_D} \left(i_d - \frac{\tilde{\sigma}_D}{\tilde{\sigma}_f + \tilde{\sigma}_D + \tilde{\sigma}_f \tilde{\sigma}_D} i_d \right)}_{-i_d''}$$

$$\psi_q = L_q i_q - L'_{hq} \underbrace{\frac{1}{1+\tilde{\sigma}_Q}}_{-i_q''} i_q$$

i_d, i_q nach S. 101/102 einsetzen

$$i_{f0}'' = \frac{\sqrt{3} U_0}{\omega_s L'_{hd}}$$

L_d'', L_q'' nach S. 101

$$\psi_d = \frac{\sqrt{3} U_0}{\omega_s} \cos \omega_s t$$

$$\dot{\psi}_d = j \psi_q$$

$$\psi_q = -\frac{\sqrt{3} U_0}{\omega_s} \sin \omega_s t$$

$$\dot{\psi}_q = -j \psi_d$$

$$\frac{\psi}{s_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_d + j \psi_q) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{U_0}{\omega_s} e^{-j \omega_s t}$$

ψ_{s1}
ψ_{s2}
ψ_{s3}

 $= \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{array}{|c|c|} \hline \cos(\omega_s t + \varphi_0) & -\sin(\omega_s t + \varphi_0) \\ \hline \cos(\omega_s t + \varphi_0 - 2\pi/3) & -\sin(\omega_s t + \varphi_0 - 2\pi/3) \\ \hline \cos(\omega_s t + \varphi_0 - 4\pi/3) & -\sin(\omega_s t + \varphi_0 - 4\pi/3) \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \psi_d \\ \hline \psi_q \\ \hline \end{array}$

ψ_{s1}
ψ_{s2}
ψ_{s3}

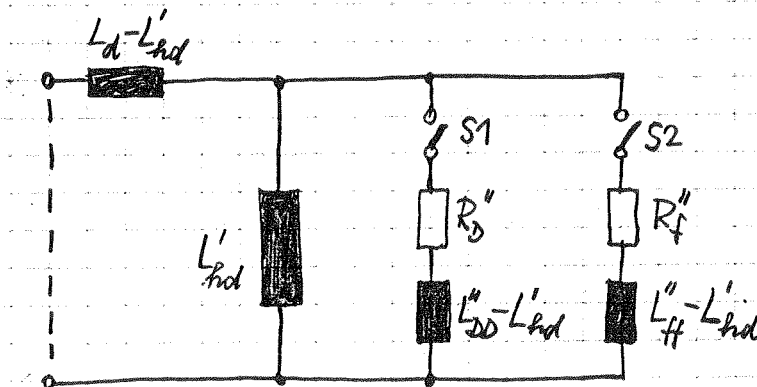
 $= \frac{\sqrt{2} U_0}{\omega_s} \begin{array}{|c|} \hline \cos \varphi_0 \\ \hline \cos(\varphi_0 - 2\pi/3) \\ \hline \cos(\varphi_0 - 4\pi/3) \\ \hline \end{array}$

Wegen der fehlenden Dämpfung sind die Flüsse eingetrennen, was auch direkt z.B. aus $u_{s1} = \dot{\psi}_{s1} = 0$ folgt.

Verbesserte Näherungsformeln für i_{s1} und M_{i1} erhält man mit Berücksichtigung der Dämpfung (keine Herleitung!):

$$i_{s1} = \sqrt{2} U_0 \left\{ - \left[\frac{1}{X_d} + \left(\frac{1}{X_d'} - \frac{1}{X_d} \right) e^{-t/\tau_d'} + \left(\frac{1}{X_d''} - \frac{1}{X_d'} \right) e^{-t/\tau_d''} \right] \cos(\omega_s t + \varphi_0) + \right. \\ \left. \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X_d''} + \frac{1}{X_q} \right) e^{-t/\tau_d''} \cos \varphi_0 + \right. \\ \left. \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X_d'} - \frac{1}{X_q} \right) e^{-t/\tau_d'} \cos(2\omega_s t + \varphi_0) \right\}$$

Zur Erklärung der Induktivität L_d' und der Zeitkonstanten τ_d' und τ_d'' dient das um die Widerstände ergänzte Ersatzschaltbild von S. 101:



L_d' : $R_D'' = 0$, $R_f'' = 0$, $S1$ offen, $S2$ geschl.

Zur Erklärung der Zeitkonstanten wird der Zweipol kurzgeschlossen (---)

τ_d' , meßbar an den Klemmen von $S2$, wenn $S1$ offen

τ_d'' , meßbar an den Klemmen von $S1$, wenn $R_f'' = 0$ und $S2$ geschl.

Folglich wird τ_d' von R_f'' und τ_d'' von R_D'' bestimmt.

Ist keine Dämpferwicklung vorhanden ($R_D'' = \infty$), dann wird $\tau_d'' = 0$.

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{L_d''} + \frac{1}{L_q''} \right) = \frac{1}{L_a''}, \quad \tau_a'' = \frac{L_a''}{R_s}$$

Der Abklingvorgang des Gleichglieds und des doppeltfrequenten Anteils von i_{s1} wird also vom Ständerwiderstand bestimmt. Für die Zeitkonstanten und die Reaktanzen gelten folgende Ungleichungen:

$$\tau_d'' < \tau_a'' < \tau_d'$$

$$X_d'' < X_a'' < X_d' < X_d$$

Beispiel: Turbogenerator

bezogene Reaktanzen: $X_d'' = 0,25$ $X_d' = 0,33$ $X_d = 2,5$

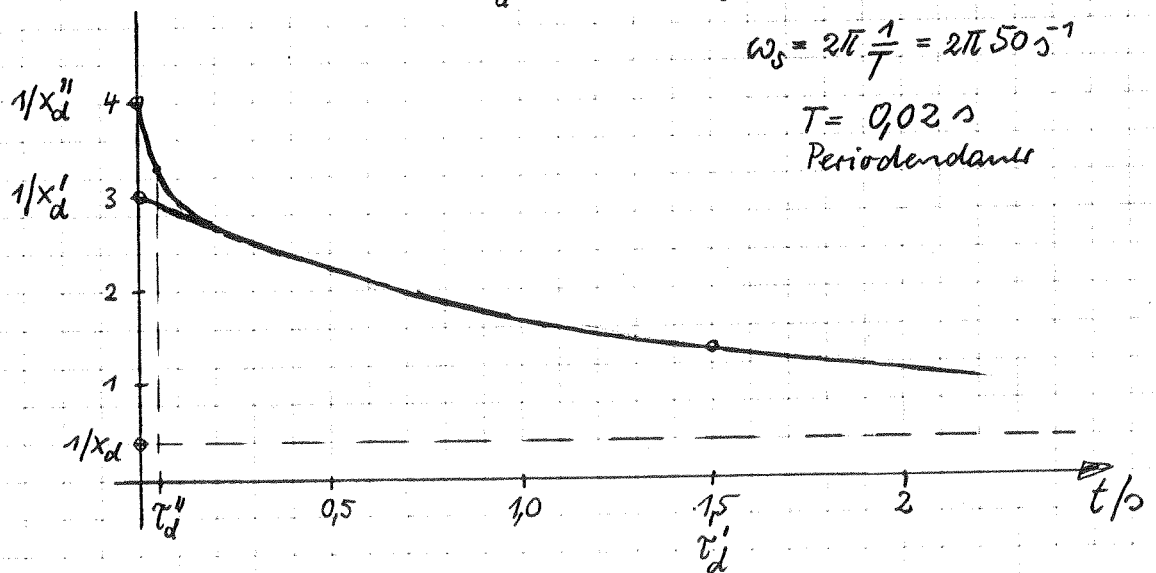
$$\tau_d'' = 0,05 \text{ s} \quad \tau_d' = 1,5 \text{ s}$$

$$\tau_a'' = 0,5 \text{ s} \quad \tau_{d0}' \approx 12 \text{ s (Erregerr. Leerlauf)}$$

$$\omega_s = 2\pi \frac{1}{T} = 2\pi 50 \text{ s}^{-1}$$

$$T = 0,02 \text{ s}$$

Periodendauer



Diese Funktion und ihr Spiegelbild bezüglich der Abszisse beschreiben die Einhüllende des ω_s -frequenten Anteil von i_{s1} nach S.106 in bezogener Form. Hinzu kommen im Fall $\cos \varphi_0 \neq 0$ noch ein Gleichglied und im Fall $X_d'' \neq X_q''$ noch ein $2\omega_s$ -frequenten Anteil, beide mit $e^{-t/\tau_a''}$ abklingend. Der maximale Betrag obiger Einhüllenden wird für $X_d'' = X_q''$ und $|\cos \varphi_0| = 1$ den Wert $2 \cdot (1/X_d'')$ erreichen (bei $t=0$).

Die Beziehung für M_{i1} lautet unter Berücksichtigung der Dämpfung:

$$M_{i1} = - \frac{3p U_0^2}{\omega_s} e^{-t/\tau_a''} \left\{ \left[\frac{1}{X_d} + \left(\frac{1}{X_d'} - \frac{1}{X_d} \right) e^{-\frac{t}{\tau_d'}} + \left(\frac{1}{X_d''} - \frac{1}{X_d'} \right) e^{-\frac{t}{\tau_d''}} \right] \sin \omega_s t - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X_d''} - \frac{1}{X_g''} \right) \sin 2\omega_s t \right\} \quad \text{vergl. S. 103!}$$

Danorbschluss $t \rightarrow \infty$ $M_{i1} = 0$

Der Verlauf des inneren Drehmoments ist vom

Kurzschlusszeitpunkt unabhängig. Es besteht aus einem ω_s -frequenten und im Falle $X_d'' \neq X_g''$ zusätzlich einem $2\omega_s$ -frequenten Anteil. Das Maximum der einwirkenden ergibt für $X_d'' = X_g''$ den bereits auf S. 104 ermittelten Wert (bei $t=0$). Die zwischen der kurzgeschlossenen Maschine und der Antriebsmaschine ($j = \omega_s = \text{const.}$) pendelnde mechanische Leistung genügt der Bilanz:

$$P_{\text{mech}} = \frac{1}{p} j M_{i1} = - \frac{dW_m}{dt} - P_v + P_f ; \quad P_f \approx 0 \quad \text{siehe S. 109!}$$

W_m ist die in der Maschine gespeicherte magnetische Energie und P_v sind die bei vernachlässigter Dämpfung verschwindenden Stromwärmeverluste. Im letzteren Fall ergibt sich mit M_{i1} nach S. 103 für $X_d'' = X_g''$:

$$\frac{dW_m}{dt} = \frac{3U_0^2}{X_d''} \sin \omega_s t$$

$$W_m = - \frac{3U_0^2}{\omega_s^2 L_d''} \cos \omega_s t + C$$

Die Integrationskonstante C wird über den Anfangswert

$$W_{m0} = W_m(t=0)$$

bestimmt, der mit den Stromanfangswerten von S. 100

$$P_f = u_f^* i_f'' = u_f^* \left(i_{f0}'' - \frac{G_D}{G_f + G_D + G_f G_D} i_d \right)$$

$$u_f^* = R_f^* i_{f0}'' = R_f^* \frac{\sqrt{3} U_0}{X_{fd}'}$$

$$i_d = - \frac{\sqrt{3} U_0}{X_d''} (1 - \cos \omega_s t)$$

$$P_f = \frac{3 U_0^2}{X_d''} \left[\frac{X_d'' R_f^*}{X_{fd}'} + \frac{G_D}{G_f + G_D + G_f G_D} \frac{R_f^*}{X_{fd}'} (1 - \cos \omega_s t) \right]$$

$$P_{mechi} = - \frac{3 U_0^2}{X_d''} \sin \omega_s t$$

$$[] \ll 1 \quad \leadsto \quad P_f \ll \hat{P}_{mechi}$$

$$\begin{array}{lll} 0 \leq \omega_s t < \pi : & \dot{W}_m > 0 & P_{mechi} < 0 \\ \pi < \omega_s t < 2\pi : & \dot{W}_m < 0 & P_{mechi} > 0 \end{array}$$

aus der Beziehung

$$W_m = \frac{1}{2} (\vec{i})^T (\vec{\Psi}) = \frac{1}{2} (\vec{i})^T (\vec{L}) (\vec{i})$$

(vergl. Flussbeziehung S. 65) resultiert:

$$W_{m0} = \frac{1}{2} L''_{ff} i_{f0}''^2$$

$$W_{m0} = \frac{1}{2} (1 + \tilde{G}_f) \frac{3 U_0^2}{\omega_s^2 L'_{hd}}$$

daraus folgt

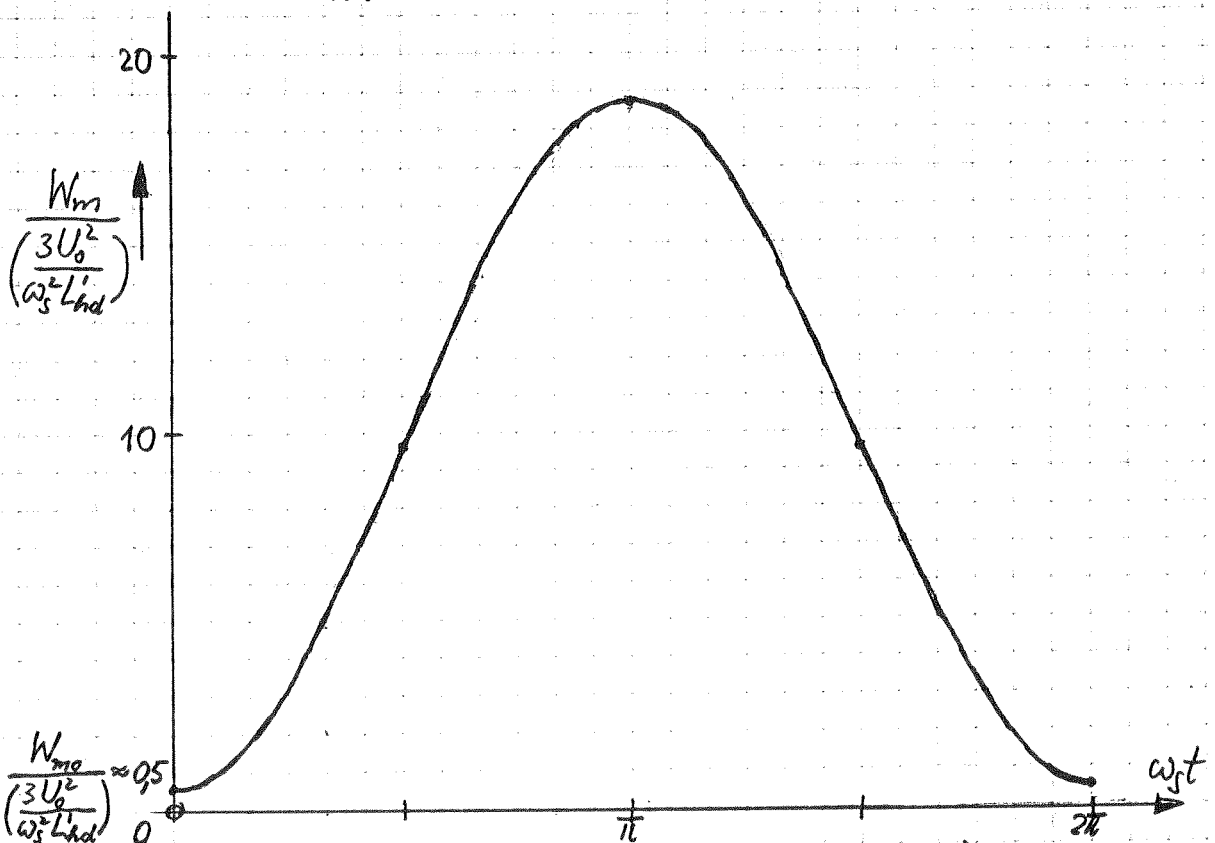
$$C = \frac{3 U_0^2}{\omega_s^2} \left[\frac{1 + \tilde{G}_f}{2 L'_{hd}} + \frac{1}{L''_d} \right]$$

und

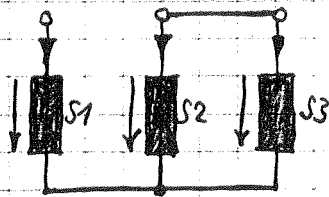
$$W_m = \frac{3 U_0^2}{\omega_s^2 L'_{hd}} \left[\frac{1}{2} (1 + \tilde{G}_f) + \frac{L'_{hd}}{L''_d} (1 - \cos \omega_s t) \right]$$

Beispiel: $\tilde{G}_f = 0,1$ $L'_{hd} = \frac{1}{1,1} L_d$ $x_d = 2,5$ $x_d'' = 0,25$

$$W_m = \frac{3 U_0^2}{\omega_s^2 L'_{hd}} [9,65 - 9,1 \cos \omega_s t]$$



Zweipoliger Stoßkutschluß:



$$u_{S2} = u_{S3}$$

$$\gamma = \omega_s t + \gamma_0$$

$$i_{S2} = -i_{S3}$$

$$\dot{\gamma} = \omega_s$$

$$i_{S1} = 0$$

$$u_{f0}'' = R_f'' i_{f0}''$$

Daraus folgt mittels der Transformation von S. 94:

$$u_d \sin \gamma + u_q \cos \gamma = 0$$

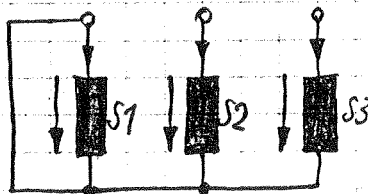
$$i_d \cos \gamma = i_q \sin \gamma$$

$$i_{s0} = 0$$

9 Unbekannte: $i_d', i_q', i_{s0}', i_f'', i_0'', i_Q'', u_d, u_q, u_{s0}$

9 Gleichungen: obige 3 und die 6 Spannungsgln. von S. 90

Einpölicher Stoßkutschluß:



$$u_{S1} = 0$$

$$\gamma = \omega_s t + \gamma_0$$

$$i_{S2} = 0$$

$$\dot{\gamma} = \omega_s$$

$$i_{S3} = 0$$

$$u_{f0}'' = R_f'' i_{f0}''$$

Daraus folgt mittels der Transformation von S. 94:

$$u_d \cos \gamma - u_q \sin \gamma + \frac{1}{\sqrt{2}} u_{s0} = 0$$

$$i_d = \sqrt{2} i_{s0} \cos \gamma$$

$$i_q = -\sqrt{2} i_{s0} \sin \gamma$$

9 Unbekannte, 9 Gleichungen (siehe oben!)

In beiden Fällen ergibt sich wegen der Unsymmetrie ein zeitvarianten lineares Differentialgleichungssystem.

Näherungslösungen erhält man durch Mittelung der Koeffizienten.

Unter der Annahme $X_d'' = X_q''$ ergeben sich für den Fall, daß

kein Glied auftritt, aus den Näherungen folgende dynamischen Maximalwerte und stationären Effektivwerte, die hier mit den Werten für den dreipoligen Kurzschluß verglichen werden:

$$i_{skIII\max} = \frac{\sqrt{2}U_0}{X_d''} ; \quad i_{skII\max} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}U_0}{2X_d''} ; \quad i_{skI\max} = \frac{3\sqrt{2}U_0}{2X_d'' + X_{s0}}$$

$$I_{skIII} = \frac{U_0}{X_d} ; \quad I_{skII} = \frac{\sqrt{3}U_0}{X_d + X_d''} ; \quad I_{skI} = \frac{3U_0}{X_d + X_d'' + X_{s0}}$$

Der einpoligen Kurzschluß ergibt dynamisch und stationär die höchsten Werte. Die dynamischen Werte können infolge des Glieds im ungünstigsten Fall doppelt so groß werden.

Spannungsgleichungen der Synchronmaschine

in "Operatorenschreibweise":

$$\frac{d}{dt} = p$$

nach S. 90

Elimination von i_d und i_D !

$$u_f'' = R_f'' i_f'' + p (L_{hd}' i_d + L_{ff}'' i_f'' + L_{hd}' i_D'')$$

$$0 = R_D'' i_D'' + p (L_{hd}' i_d + L_{hd}' i_f'' + L_{DD}'' i_D'')$$

$u_f'' - p L_{hd}' i_d$	$=$	$R_f'' + p L_{ff}''$	$p L_{hd}'$	i_f''
$- p L_{hd}' i_d$		$p L_{hd}'$	$R_D'' + p L_{DD}''$	i_D''

i_f''	$=$	1	$R_D'' + p L_{DD}''$	$- p L_{hd}'$	$u_f'' - p L_{hd}' i_d$
i_D''	$=$	D_1	$- p L_{hd}'$	$R_f'' + p L_{ff}''$	$- p L_{hd}' i_d$

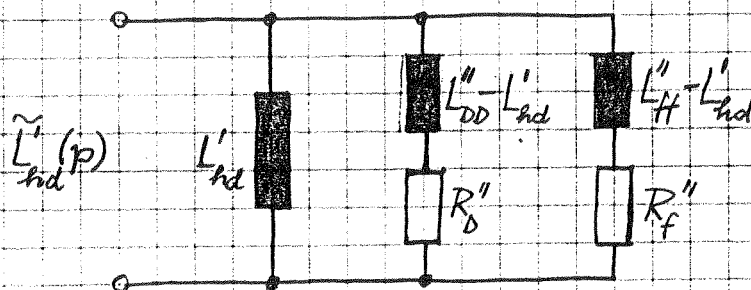
$$D_1 = (R_f'' + p L_{ff}'')(R_D'' + p L_{DD}'') - p^2 L_{hd}'^2$$

$$\psi_d = L_d i_d + L_{hd}' i_f'' + L_{hd}' i_D''$$

$$\parallel \psi_d = [(L_d - L_{hd}') + \tilde{L}_{hd}'(p)] i_d + \tilde{L}_{hd}'(p) \frac{u_f''}{R_f'' + p(L_{ff}'' - L_{hd}')}$$

$$\tilde{L}_{hd}'(p) = \frac{1}{D_2} L_{hd}' [R_f'' + p(L_{ff}'' - L_{hd}')][R_D'' + p(L_{DD}'' - L_{hd}')]]$$

$$D_2 = [R_f'' + p(L_{ff}'' - L_{hd}')][R_D'' + p(L_{DD}'' - L_{hd}')] + p L_{hd}' \{ [R_f'' + p(L_{ff}'' - L_{hd}')] + [R_D'' + p(L_{DD}'' - L_{hd}')] \}$$



- 114 -

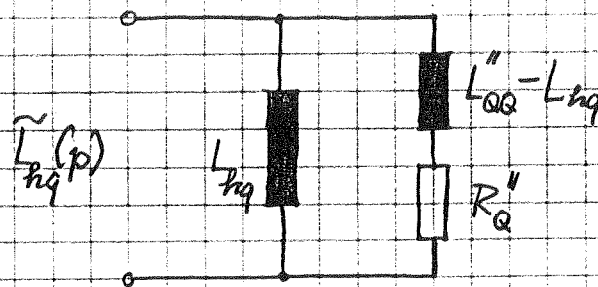
$$0 = R_Q'' i_Q'' + p(L_{hq} i_q + L_{QQ}'' i_Q'')$$

$$i_Q'' = \frac{-pL_{hq}}{R_Q'' + pL_{QQ}''} i_q$$

$$\psi_q = L_q i_q + L_{hq} i_Q''$$

$$\psi_q = [(L_q - L_{hq}) + \tilde{L}_{hq}(p)] i_q$$

$$\tilde{L}_{hq}(p) = \frac{L_{hq} [R_Q'' + p(L_{QQ}'' - L_{hq})]}{R_Q'' + p(L_{QQ}'' - L_{hq}) + pL_{hq}}$$



$$u_d = R_s i_d - j \psi_q + p \psi_d$$

$$u_q = R_s i_q + j \psi_d + p \psi_q$$

u_d	$R_s + p[(L_d - L_{hd}') + \tilde{L}_{hd}'(p)]$	$-j[(L_q - L_{hq}) + \tilde{L}_{hq}(p)]$	i_d
u_q	$j[(L_d - L_{hd}') + \tilde{L}_{hd}'(p)]$	$R_s + p[(L_q - L_{hq}) + \tilde{L}_{hq}(p)]$	i_q

$\frac{p \tilde{L}_{hd}'(p)}{R_f'' + p(L_{ff}'' - L_{fd}')}$	u_f''
$\frac{j \tilde{L}_{hd}'(p)}{R_f'' + p(L_{ff}'' - L_{fd}')}$	